1. 看涨期权性质

符号约定：

- $C_t^{Eu}(K,T)$ 表示执行价格为 K，到期日为 T 的欧式看涨期权在时刻 t 的价格
- $P_t^{Eu}(K,T)$ 表示执行价格为 K，到期日为 T 的欧式看跌期权在时刻 t 的价格
- $C_t^{Am}(K,T)$ 表示执行价格为 K，到期日为 T 的美式看涨期权在时刻 t 的价格
- $P_t^{Am}(K,T)$ 表示执行价格为 K，到期日为 T 的美式看跌期权在时刻 t 的价格
- $B_t(T) = B(t,T) = e^{-r(T-t)}$

平价原理：

$$C_t^{Eu}(K,T) + B_t(T)K = P_t^{Eu}(K,T) + S_t$$

Teorema 1

若执行价格 $K_1 > K_2$，则

$$C_t^{Eu}(K_1,T) \leqslant C_t^{Eu}(K_2,T)$$

且

$$C_t^{Am}(K_1,T) \leqslant C_t^{Am}(K_2,T)$$

proof. **对于欧式看涨期权：**

执行价格	期权价值	
	t	T
K_1	$C_t^{Eu}(K_1,T)$	$\max\{S_T - K_1, 0\}$
K_2	$C_t^{Eu}(K_2,T)$	$\max\{S_T - K_2, 0\}$

由期权价格 $K_1 > K_2$，则有：$max\{S_T - K_1, 0\} \leqslant max\{S_T - K_2, 0\}$

(反证法) 若 $C_t^{Eu}(K_1,T) > C_t^{Eu}(K_2,T)$，则在 t 时刻通过买入一份执行价格为 K_2 的期权（多头），卖出一份执行价格为 K_1 的期权（空头），则现金流为：

	时刻	
	t	T
现金流	$C_t^{Eu}(K_1,T) - C_t^{Eu}(K_2,T) > 0$	$\max\{S_T - K_2, 0\} - max\{S_T - K_1, 0\} \geqslant 0$

即实现了套利机会，由于市场无套利假设，则上述假设矛盾！故 $C_t^{Eu}(K_1,T) \leqslant C_t^{Eu}(K_2,T)$

对于美式看涨期权：

由于美式看涨期权与欧式看涨期权价格相同，即

$$C_t^{Eu}(K_1,T) = C_t^{Am}(K_1,T),\ C_t^{Eu}(K_2,T) = C_t^{Am}(K_2,T)$$

依然使用反证法，若 $C_t^{Am}(K_1,T) > C_t^{Am}(K_2,T)$，则在 t 时刻通过买入一份执行价格为 K_2 的期权（多头），卖出一份执行价格为 K_1 的期权（空头）

若不提前执行美式看涨期权，则证明方法同上；

若提前执行美式看涨期权，则在任一时刻 $\tau \in [t,T]$ 当对手方执行时，也同时全部执行即可

综上可得，$C_t^{Am}(K_1,T) \leqslant C_t^{Am}(K_2,T)$ □

Teorema 2

若执行价格 $K_1 \geqslant K_2$，则

$$C_t^{Eu}(K_1,T) - C_t^{Eu}(K_2,T) \leqslant B_t(T)(K_1-K_2)$$

且

$$C_t^{Am}(K_2,T) - C_t^{Am}(K_1,T) \leqslant K_1 - K_2$$

proof. 构造如下两份投资组合：

A：一份欧式看涨期权 + 金额为 K_1 的现金

B：一份欧式看跌期权 + 金额为 K_2 的现金

且两份欧式看涨期权有相同到期日 T

则组合 A 价值为：$V_{A\tau} = max\{S_\tau, K_1\} + K_1 e^{r(\tau-t)} - K_1$

则组合 B 价值为：$V_{A\tau} = max\{S_\tau, K_2\} + K_2 e^{r(\tau-t)} - K_2$

由 $K_1 \geqslant K_2$，故 $V_{A\tau} \geqslant V_{B\tau}$，且由无套利原理，在时刻 T 仍有：$V_{At} \geqslant V_{Bt}$，即

$$\begin{aligned} & C_t^{Eu}(K_1,T) + K_1 e^{-r(T-t)} \geqslant C_t^{Eu}(K_2,T) + K_2 e^{-r(T-t)} \\ \Rightarrow\ & C_t^{Eu}(K_1,T) - C_t^{Eu}(K_2,T) \geqslant K_2 e^{-r(T-t)} - K_1 e^{-r(T-t)} \\ \Rightarrow\ & C_t^{Eu}(K_2,T) - C_t^{Eu}(K_1,T) \leqslant B_t(T)(K_1-K_2) \end{aligned}$$

对于美式看涨期权同理，在任意 $\tau \in [t,T]$ 时刻，有 $V_{A\tau} \geqslant V_{B\tau}$，即

$$\begin{aligned} & C_t^{Am}(K_1,T) + K_1 e^{-r(\tau-t)} \geqslant C_t^{Am}(K_2,T) + K_2 e^{-r(\tau-t)} \\ \Rightarrow\ & C_t^{Am}(K_1,T) - C_t^{Am}(K_2,T) \geqslant K_2 e^{-r(\tau-t)} - K_1 e^{-r(\tau-t)} \\ \Rightarrow\ & C_t^{Am}(K_2,T) - C_t^{Am}(K_1,T) \leqslant B_t(\tau)(K_1-K_2) \leqslant K_1 - K_2 \end{aligned}$$

□

Teorema 3

若执行价格 $K_1 > K_2 > K_3$，则

$$C_t^{Eu}(K_2,T) \leqslant \frac{K_2-K_3}{K_1-K_3} C_t^{Eu}(K_1,T) + \frac{K_1-K_2}{K_1-K_3} C_t^{Eu}(K_3,T)$$

$$C_t^{Am}(K_2,T) \leqslant \frac{K_2-K_3}{K_1-K_3} C_t^{Am}(K_1,T) + \frac{K_1-K_2}{K_1-K_3} C_t^{Am}(K_3,T)$$

同理

$$P_t^{Eu}(K_2,T) \leqslant \frac{K_2-K_3}{K_1-K_3} P_t^{Eu}(K_1,T) + \frac{K_1-K_2}{K_1-K_3} P_t^{Eu}(K_3,T)$$

$$P_t^{Am}(K_2,T) \leqslant \frac{K_2-K_3}{K_1-K_3} P_t^{Am}(K_1,T) + \frac{K_1-K_2}{K_1-K_3} P_t^{Am}(K_3,T)$$

proof. 不妨记 $\lambda = \frac{K_2-K_3}{K_1-K_3}$，则 $1-\lambda = \frac{K_1-K_2}{K_1-K_3}$

对于欧式期权：

在 t 时刻考虑两个策略 $(t<T)$

A：λ 份执行价格为 K_1 的欧式看涨期权 $+\ 1-\lambda$ 份执行价格为 K_3 的欧式看涨期权

B：1 份执行价格为 K_2 的欧式看涨期权

且三份欧式看涨期权有相同到期日 T，在到期日 T 时刻有：

则组合 A 价值为：$V_{AT}=\lambda(S_T-K_1)^+ + (1-\lambda)(S_T-K_3)^+$

则组合 B 价值为：$V_{BT}=(S_T-K_2)^+$

1. 当 $S_T\geqslant K_1$ 时
$$V_{AT}=S_T-K_2=V_{BT}$$

2. 当 $K_2\leqslant S_T\leqslant K_1$ 时
$$V_{AT}=(1-\lambda)(S_T-K_3)$$
$$V_{BT}=(S_T-K_2)=\lambda(S_t-K_1)+(1-\lambda)(S_T-K_3)$$
$$\Rightarrow\ V_{AT}>V_{BT}$$

3. 当 $K_3<S_T<K_2$ 时
$$V_{AT}=(1-\lambda)(S_T-K_3)$$
$$V_{BT}=0$$
$$\Rightarrow\ V_{AT}>V_{BT}$$

4. 当 $S_T<K_3$ 时
$$V_{AT}=V_{BT}=0$$

综上，在 T 时刻有 $V_{AT}\geqslant V_{BT}$，且 $P\{V_{AT}>V_{BT}\}>0$，则根据无套利原理有 $V_{At}>V_{Bt}$，即要证明的不等号成立；同时取 $\lambda=0$或1 可知等号成立

综上，我们得到：
$$C_t^{Eu}(K_2,T)\leqslant\frac{K_2-K_3}{K_1-K_3}C_t^{Eu}(K_1,T)+\frac{K_1-K_2}{K_1-K_3}C_t^{Eu}(K_3,T)$$

由平价原理：
$$C_t^{Eu}(K,T)+B_t(T)K=P_t^{Eu}(K,T)+S_t$$

可得：
$$P_t^{Eu}(K_2,T)\leqslant\frac{K_2-K_3}{K_1-K_3}P_t^{Eu}(K_1,T)+\frac{K_1-K_2}{K_1-K_3}P_t^{Eu}(K_3,T)$$

对于美式期权：

若美式期权不提前执行，则证明同上述欧式期权；若美式期权提前执行，则在对手方执行时，也同时全部执行即可，即有：
$$P_t^{Eu}(K_2,T)\leqslant\frac{K_2-K_3}{K_1-K_3}P_t^{Eu}(K_1,T)+\frac{K_1-K_2}{K_1-K_3}P_t^{Eu}(K_3,T)$$
$$P_t^{Am}(K_2,T)\leqslant\frac{K_2-K_3}{K_1-K_3}P_t^{Am}(K_1,T)+\frac{K_1-K_2}{K_1-K_3}P_t^{Am}(K_3,T)$$

□