1. Black-Scholes 方程

Teorema 1
推导 Black-Scholes 方程：

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV$$

proof. 假设 $V(S,t)$ 为期权价格的随机过程，并且股价服从几何布朗运动。构造一个投资组合：

$$\Pi = V - \Delta S$$

经济意义就是一个 delta 对冲，在买入（或卖出）1 份期权的同时，卖出（或买入）Δ 份股票进行敞口调整。在一个很短的时间 dt 内，假定 Δ 一直为期初定值而没有发生变动（也是符合实际的），那么：

$$d\Pi = dV - \Delta dS$$

其中，dV 由伊藤引理有：

$$dV = (\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dW$$

dS 由几何布朗运动有：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

代入可得：

$$d\Pi = (\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \mu\Delta S)dt + \sigma S(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta)dW$$

因此可令 $\frac{\partial V}{\partial S} = \Delta$ 消去 dW 的系数得：

$$d\Pi = (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt$$

此时，这个 delta 对冲后的组合就是一个确定性增长的投资组合了，这对应了无风险投资，假定无风险利率为 r，则有：

$$d\Pi = r\Pi dt = r(V - \Delta S)dt = r(V - S\frac{\partial V}{\partial S})dt$$

比较以上两个方程可得：

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV$$

此即为 Black-Scholes 方程，所有的 $V = V(S,t)$ 的衍生产品都需要服从该方程（也就是它的解）。注意到，由于构造了 $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$，使得不确定性消除了，从而也使得股价收益率 μ 消失了，最终只有无风险收益率 r 存在于方程中，此即对应上了“风险中性定价”的概念（构造了一个无风险的投资组合） □