1. 反射布朗运动

设 B 是概率空间 (Ω, F, P) 上的一维标准布朗运动，对 $a>0$，令

$$T_a = inf\{t>0 : B_t \geqslant a\}$$

Teorema 1

定义过程 B_t^a 如下

$$B_t^a = \begin{cases} B_t & \text{if } t < T_a, \\ 2a - B_t & \text{if } t \geqslant T_a. \end{cases}$$

证明 B_t^a 也是标准布朗运动

proof. 首先定义过程 Z 如下：

$$Z_t = \begin{cases} B_t & \text{if } t < T_a, \\ W_{t-T_a} + B_{T_a} & \text{if } t \geqslant T_a. \end{cases}$$

由强马氏性可知 ${}^T B$ 是一个与 (B^T, T) 独立的布朗运动，其中

$${}^T B = \{B_{t+T} - B_T\}, B^T = \{B_{t\wedge T}, t \geqslant 0\}$$

则可知三元组 (W, B^T, T) 与 $({}^T B, B^T, T)$ 同分布，由于过程 Z, B 是由这两个三元组用相同方法构造的，即存在可测函数 F 满足 $Z = F(W, B^T, T)$, $B = F({}^T B, B^T, T)$，即 Z, B 有相同的分布，则 Z 是一个标准布朗运动，为证明本题目，只需取 $W_t = -{}^T B$ 即可，则 B_t^a 也是标准布朗运动 □

Teorema 2

令

$$S_t = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} B_s = inf\{a : T_a \geqslant t\}$$

证明

$$P(S_t \geqslant a) = P(T_a \leqslant t) = 2P(B_t \geqslant a) = P(| B_t | \geqslant a)$$

proof. 对 $a>0$，令

$$T_a = inf\{t>0 : B_t \geqslant a\}$$

则 T_a 为布朗运动首次到达 a 的时间，由 Kolmogorov 0-1 律可知：

$$\lim_{t\to\infty} \sup B_t = \infty \quad \text{(a.s.)}$$

因此 $T_a < \infty$，a.s. 它是有限停时，下面我们利用强马氏性计算

$$P(B_t \geqslant a, T_a \leqslant t)$$

注意到 $\{B_t \geqslant a\}$ 可以推出 $\{T_a \leqslant t\}$，因此上面的概率为 $P(B_t \geqslant a)$，定义转移过程 $W_t =$

$B_{t+T_a}-B_{T_a}=B_{t+T_a}-a$，则上面的概率可以重新表示为：

$$P(W_{t-T_a}\geqslant 0,T_a\leqslant t)$$

上面的概率可以看作随机变量 W 和 T 的函数的期望，由于 $W\in\sigma\{^TB\},T_a\in F_T$，所以由强马氏性知道这两个随机变量独立

则由 Fubini 定理知，取期望时，可以先固定一个变量，然后取条件期望，这里把 T 看作常数，因此 W 是布朗运动，则

$$\forall s,\ P(W_{t-s})=\frac{1}{2}$$

则可以推出

$$P(B_t\geqslant a)=P(B_t\geqslant a,T_a\leqslant t)=\frac{1}{2}P(T_a\leqslant t)$$

另一方面，由于 $\{T_a\leqslant t\}=\{S_t\geqslant a\}$

$$P(S_t\geqslant a)=2P(B_t\geqslant a)=P(\mid B_t\mid\geqslant a)$$

即表明了 S_t 与 $\mid B_t\mid$ 同分布，综上得到

$$P(S_t\geqslant a)=P(T_a\leqslant t)=2P(B_t\geqslant a)=P(\mid B_t\mid\geqslant a)$$

□

Teorema 3

对 $a\leqslant b,b>0$，证明

$$P(S_t\geqslant b,B_t<a)=P(B_t<a-2b)$$

这样 (B_t,S_t) 的联合密度函数为

$$(\frac{2}{\pi t^3})^{\frac{1}{2}}(2b-a)e^{\frac{-(2b-a)^2}{2t}},\ a\leqslant b,\ b\geqslant 0$$

proof. 由第一题知 B_t^a 为布朗运动 B 在 T_a 后经过反射得到的布朗运动，不妨记 T_a^B 和 $T_a^{B_t^a}$ 表示 B 和 B_t^a 首次到达 a 的时刻，显然这两个时刻相同，则对 $a\leqslant b,\ b\geqslant 0$，我们有：

$$\begin{aligned}
P(S_t\geqslant b,B_t<a)&=P(T_a^B\leqslant t,B_t<a)\\
&=P(T_a^{B_t^a}\leqslant t,B_t^a<a)\\
&=P(T_a^B\leqslant t,B_t\geqslant 2b-a)\\
&=P(B_t\geqslant 2b-a)\\
&=P(B_t<a-2b)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{a-2b}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx
\end{aligned}$$

则对 a，b 求偏导，可得到 (B_t,S_t) 的联合密度函数为：

$$(\frac{2}{\pi t^3})^{\frac{1}{2}}(2b-a)e^{\frac{-(2b-a)^2}{2t}},\ a\leqslant b,\ b\geqslant 0$$

□