1. 布朗运动的不变性质

设 B 是一维标准布朗运动，则下列结论成立：

Teorema 1

(time-homogeneity) 对任意 $s > 0$, $(B_{t+s} - B_s, t \geqslant 0)$ 也是一维标准布朗运动，且独立于 $\sigma(B_u, 0 \leqslant u \leqslant s)$

proof. 由题，B 为一维标准布朗运动，要证 $(B_{t+s} - B_s, t \geqslant 0)$ 也是一维标准布朗运动，只需验证：

a) 独立增量性：

由于对于任意有限正数：$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$，随机变量

$$B_0, B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \text{ 相互独立}$$

则随机变量

$$B_0, B_{t_1+s} - B_s, B_{t_2+s} - B_{t_1+s}, \ldots, B_{t_n+s} - B_{t_{n-1}+s} \text{ 也相互独立}$$

b) 平稳性：

对任意的 $t' > t$, 增量 $(B_{t'+s} - B_s) - (B_{t+s} - B_s) = B_{t'+s} - B_{t+s} \sim N(0, t' - t)$

c) 轨道连续性：

显然有：$P\{\omega \mid t \mapsto B_{t+s}(\omega)\} = 1$

综上，$(B_{t+s} - B_s, t \geqslant 0)$ 也是一维标准布朗运动 □

Teorema 2

(symmetry)$(-B_t, t \geqslant 0)$ 是一维标准布朗运动

proof. 显然成立，验证上三个性质即可 □

Teorema 3

(scaling) 对任意 $c > 0$ 过程 $(cB_{t/c^2}, t \geqslant 0)$ 是一维标准布朗运动

proof. 要证 $(cB_{t/c^2}, t \geqslant 0)$ 也是一维标准布朗运动，只需验证：

a) 独立增量性：

由于对于任意有限正数：$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$，随机变量

$$B_0, B_{t_1/c^2} - B_{t_0/c^2}, \ldots, B_{t_n/c^2} - B_{t_{n-1}/c^2} \text{ 相互独立}$$

则随机变量

$$cB_0, cB_{t_1/c^2} - cB_{t_0/c^2}, \ldots, cB_{t_n/c^2} - cB_{t_{n-1}/c^2} \text{ 也相互独立}$$

b) 平稳性:

对任意的 $s > t$, 增量 $(cB_{s/c^2} - cB_{t/c^2}) = c(B_{s/c^2} - B_{t/c^2}) \sim N\big(0, c^2(\frac{s}{c^2} - \frac{t}{c^2})\big) = N(0, s-t)$

c) 轨道连续性:

显然有: $P\{\omega \mid t \mapsto cB_{t/c^2}(\omega)\} = 1$

综上, $(cB_{t/c^2}, t \geqslant 0)$ 也是一维标准布朗运动 $\square$

Teorema 4

(time-inversion) 令 $X_0 = 0$, $X_t = tB_{1/t}$, $t > 0$, 则过程 X_t 也是一维标准布朗运动

proof. 要证 $X_0 = 0$, $X_t = tB_{1/t}$ 也是一维标准布朗运动, 只需验证:

a) 独立增量性:

由于对于任意有限正数: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, 随机变量

$$B_0, B_{1/t_n} - B_{t_0}, \ldots, B_{1/t_1} - B_{1/t_2} \text{ 相互独立}$$

则有随机变量

$$0B_0, t_nB_{1/t_n} - 0B_{t_0}, \ldots, t_1B_{1/t_1} - t_2B_{1/t_2} \text{ 相互独立}$$

即随机变量

$$X_0, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \text{ 也相互独立}$$

b) 平稳性:

对任意的 $t > s$, 增量 $B_{1/s} - B_{1/t} \sim N(0, \frac{1}{s} - \frac{1}{t})$

则增量 $X_t - X_t = sB_{1/s} - tB_{1/t} \sim N(0, s^2\frac{1}{s} - t^2\frac{1}{t}) = N(0, \frac{1}{s} - \frac{1}{t})$

c) 轨道连续性:

显然有: $P\{\omega \mid t \mapsto tB_{1/t}(\omega)\} = 1$

综上, 过程 $X_0 = 0$, $X_t = tB_{1/t}$ 也是一维标准布朗运动 $\square$