1. 条件期望的性质

Teorema 1

若 $G = \{\Omega, \oslash\}$，则 $E[X|G] = E[X]$

proof. 当 $G = \{\Omega, \oslash\}$ 时，G 是一个 σ 域，且只有必然事件 Ω 和不可能事件 $\oslash$ 是事件

a) 对于连续型随机变量：

设 (X, G) 是二维连续型随机变量，显然由独立性有：

$$p(x,y) = p_X(x)p_G(y)$$

其中 $p(x,y), p_X(x), p_G(y)$ 分别为 (X, G) 的密度函数与边际密度函数

这时条件密度函数 $p_{X|G}(x|y) = p_X(x)$

于是当 $G = y$ 时，由连续型随机变量的条件期望的定义有：

$$E[X|G=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{X|G}(x|y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x)\,\mathrm{d}x = E[X]$$

上式对 $\forall y \in G$ 成立

b) 对于离散性随机变量：同理可证

综上，$E[X|G] = E[X]$ □

Teorema 2

若 Ψ 为凸函数，且 $E[X] < \infty, E[\Psi(X)] < \infty$，则 $E[\Psi(X)|G] \geqslant \Psi(E[X|G])$

Teorema 3

若 G_1, G_2 为 G 的两个子 σ-函数，且 $G_1 \subset G_2$，则 $E\big[E[X|G_2]|G_1\big] = E[X|G_1]$

proof. 显然, X 关于 G 也 σ-可积

为了证明 $E\big[E[X|G_2]|G_1\big]$ 有意义，须证 $E[X|G_2]$ 关于 G_1 为 $\sigma-$ 可积

由于 X 关于 G_1 为 $\sigma-$ 可积, 故

$$\exists \Omega_n \in G_1,\, \Omega_n \uparrow \Omega,\, E\left[|X| I_{\Omega_n}\right] < \infty$$

又由于

$$E\big[E(X|G_2) I_A\big] = E\left[X I_A\right]$$

其中 $A \in \{A \in G_2 \mid E\left(|X| I_A\right) < \infty\}$, 并注意到 $G_1 \subset G_2$, 所以

$$E\big[|E(X|G_2)| I_{\Omega_n}\big] = E\left[|X| I_{\Omega_n}\right] < \infty$$

这表明 $E[X|G_2]$ 关于 G_1 为 $\sigma-$ 可积

由于 $E\left[|X| I_{\Omega_n}\right]<\infty$, 所以由全数学期望期望可知:

$$E\left[X I_{\Omega_n} \mid G_1\right]=E\left[E\left(X I_{\Omega_n} \mid G_2\right) \mid G_1\right] \quad \text{(a.s.)}$$

因 I_{Ω_n} 为 G_1 可测, 所以有:

$$\begin{aligned} E\left[X \mid G_1\right] I_{\Omega_n} & =E\left[X I_{\Omega_n} \mid G_1\right]=E\left[E\left(X I_{\Omega_n} \mid G_2\right) \mid G_1\right] \\ & =E\left[I_{\Omega_n} E[X \mid G_2] \mid G_1\right]=E\left[E(X \mid G_2) \mid G_1\right] I_{\Omega_n} \quad \text{(a.s.)} \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则由上式得 $E\left[E[X \mid G_2] \mid G_1\right]=E\left[X \mid G_1\right]$ (a.s.) □

Teorema 4

若 X 关于 G 可测, 则 $E[X \mid G]=X$, 一般的, 若 $Y \in G$ 且 XY 可积, 则 $E[XY \mid G]=YE[X \mid G]$

proof. 由条件期望的公理化定义:

设 X 是概率空间 (Ω, F, P) 上的可积随机变量, G 是 F 的子 σ 代数, 则 X 关于 G 的条件期望 $E[X \mid G]$ 就是满足以下两条件的随机变量:

a) $E[X \mid G]$ 就是 G 可测的;

b) $\int_A E[X \mid G] \mathrm{d} P=\int_A X \mathrm{d} P,\ A \in G$

则有: $E[X \mid G]=\int_{\Omega} X \mathrm{d} P(\cdot \mid G)=\frac{E\left[X I_G\right]}{P(G)}=X$

由 XY 可积, 于是存在 a.s. 唯一的 G 可测随机变量 $E[XY \mid G]$, 使得

$$\forall A \in G^{\prime}, E\left[E[XY \mid G] I_A\right]=E\left[XY I_A\right]$$

这里 $G^{\prime}=\left\{A \in G \mid E\left[|XY| I_A\right]<\infty\right\}$, 于是 $\forall A \in G^{\prime}$,

$$E\left[E(XY \mid G) I_{\Omega_n} I_A\right]=E\left[XY I_{\Omega_n} I_A\right]$$

又因为 $E[XY \mid G] I_{\Omega_n}$ 为 G 可测, 所以由上式知: $E[XY \mid G] I_{\Omega_n}$ 就是 $XY I_{\Omega_n}$ 关于 G 的条件期望, 于是有:

$$E[XY \mid G] I_{\Omega_n}=E\left[XY I_{\Omega_n} \mid G\right] \quad \text{(a.s.)}$$

由于 $XY I_{\Omega_n}=X I_{\Omega_n} Y I_{\Omega_n}, XY I_{\Omega_n}=X I_{\Omega_n} Y I_{\Omega_n}, E\left[|X| I_{\Omega_n}\right]<\infty, Y I_{\Omega_n}$ 为 G 可测, 所以

$$E\left[XY I_{\Omega_n} \mid G\right] I_{\Omega_n}=Y I_{\Omega_n} E\left[X I_{\Omega_n} \mid G\right] \quad \text{(a.s.)}$$

对于 X, 由于它关于 G 为 σ - 可积, 所以同样可以得到

$$E[XG] I_{\Omega_n}=E\left[X I_{\Omega_n} \mid G\right] \quad (\text{ a.s. })$$

于是有: $Y I_{\Omega_n} E\left[X I_{\Omega_n} \mid G\right]=Y I_{\Omega_n} E[X \mid G]$ (a.s.)

综上得 $E[YX \mid G] I_{\Omega_n}=Y I_{\Omega_n} E[X \mid G]$ (a.s.), 令 $n \rightarrow \infty$, 则得到: $E[XY \mid G]=YE[X \mid G]$

即有若 $Y \in G$ 且 XY 可积, 则 $E[XY \mid G]=YE[X \mid G]$ □

Teorema 5

X 和 G 独立, 当且仅当对任意的 Borel 可测函数 f, 若 $f(X)$ 可积, 则有 $E[f(X) \mid G]=E[f(X)]$

Teorema 6

X 为 G-可测，Y 与 G 独立，可测函数 $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 满足 $E\left[|\phi(X,Y)|\right] < \infty$，令 $\phi(x) = E[\phi(x,Y)]$，则 $E[\phi(X,Y)|G] = \phi(X)$

Teorema 7

若 $G = \sigma(B_1, B_2, \dots)$，其中 $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega, B_i \in F, P(B_i) > 0$，且当 $i \neq j$ 时，$B_i \cap B_j = \emptyset$，则

$$E[X|G] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E[XI_{B_i}]}{P(B_i)} I_{B_i}$$

proof. 由 $\{B_i\}_{i \geqslant n} \subset \Omega$ 是一个划分且两两不相交，则由条件期望定义以及全概率公式有：

$$E[X|G] \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i] I_{B_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E[XI_{B_i}]}{P(B_i)} I_{B_i}$$

□