第二节期权的价格特征

1、期权价格的影响因素
2、期权的盈亏
3、期权的内在价值与时间价值
4、期权的上下限
5、期权的平价关系
6、期权的其他性质

（一）期权价格的影响因素

1、标的资产的市场价格

在其他条件一定的情形下，看涨期权的价值随着标的资产市场价格的上升而上升；
看跌期权的价值随着标的资产市场价格的上升而下降。

2、期权的执行价格

在其他条件一定的情形下，看涨期权的执行价格越高，期权的价值越小；
看跌期权的执行价格越高，期权的价值越大。

3、到期期限

对于美式期权而言，无论是看跌期权还是看涨期权，在其他条件一定的情形下，到期时间越长，期权的到期日价值就越高。

但注意该结论对于欧式期权而言未必成立。一是期限较长的期权并不会比期限较短的期权增加执行的机会；二是期限较长的买入期权，可能会由于标的股票派发现金股利，形成价值扣减。

4、标的资产的价格波动率

标的资产价格波动率越大，期权价值越大。

对于购入看涨期权的投资者来说，标的资产价格上升可以获利，标的资产价格下降最大损失以期权费为限，两者不会抵消。因此，标的资产价格波动率越大，期权价值越大。

对于购入看跌期权的投资者来说，标的资产价格下降可以获利，标的资产价格上升最大损失以期权费为限，两者不会抵消。因此，标的资产价格波动率越大，期权价值越大。

5、无风险利率

如果考虑货币的时间价值，则投资者购买看涨期权未来履约价格的现值随利率的提高而降低，即投资成本的现值降低，此时在未来时期内按固定履行价格购买股票的成本降低，看涨期权的价值增大。因此，看涨期权的价值与利率正相关变动。

而投资者购买看跌期权未来履约价格的现值随利率的提高而降低，此时在未来时期内按固定履行价格销售股票的现值收入越小，看跌期权的价值就越小。因此，看跌期权的价值与利率负相关变动。

6、标的资产的收益

在除息日后，现金股利的发放引起资产价格降低，看涨期权的价值降低，而看跌期权的价值上升。因此，看涨期权的价值与期权有效期内的收益呈负相关变动，而看跌期权的价值与期权有效期内的收益呈正相关变动。

影响期权价格的因素有很多，而且各因素对期权价格的影响也很复杂。同时，影响期权价格的各因素之间既有互补关系、又有抵消关系。因此，期权价格的决定是非常复杂的。下表是对这些主要因素的一个基本总结。

一般通用公式　期权价值(价格)= $f(S,T-t,K,\sigma,r)$

表：各主要因素对期权价格的影响

影响因素	欧式看涨	欧式看跌	美式看涨	美式看跌
标的资产的市场价格	+	-	+	-
期权的执行价格	-	+	-	+
期权的到期期限	?	?	+	+
标的资产的价格波动率	+	+	+	+
无风险利率	+	-	+	-
标的资产的收益	-	+	-	+

注： “+”表示呈正相关， “-”表示呈负相关， “?”表示影响方向不一定。

（二）期权的实值、平价和虚值

1、看涨期权：实值、平价与虚值

如果不考虑时间因素，期权的盈亏取决于标的资产市价与协议价格的差距。

- 对于看涨期权来说，表达标的资产市价（S）与协议价格（K）的关系：

  S>K时的看涨期权称为实值期权（In the Money）

  S=K时的看涨期权称为平价期权（At the Money）

  S<K时的看涨期权称为虚值期权（Out of the Money）

2、看跌期权：实值、平价和虚值

对于看跌期权而言

K>S时的看跌期权称为实值期权
K=S时的看跌期权称为平价期权
K<S时的看跌期权称为虚值期权

注意与看涨期权相区别

（三）期权的内在价值与时间价值

1、内含价值

期权的内含价值（intrinsic value）

是指假定期权立即被执行时具有的价值

2、时间价值(time value)

期权的价值=内含价值+时间价值

看涨期权的内含价值为Max(S-K， 0);

看跌期权的内含价值为Max(K -S， 0)

实值美式期权的价值至少等于其内含价值，因为该期权持有者可以马上行使期权来实现其内含价值。

通常一个实值美式期权的持有者最好的做法是等待而不是立即执行期权

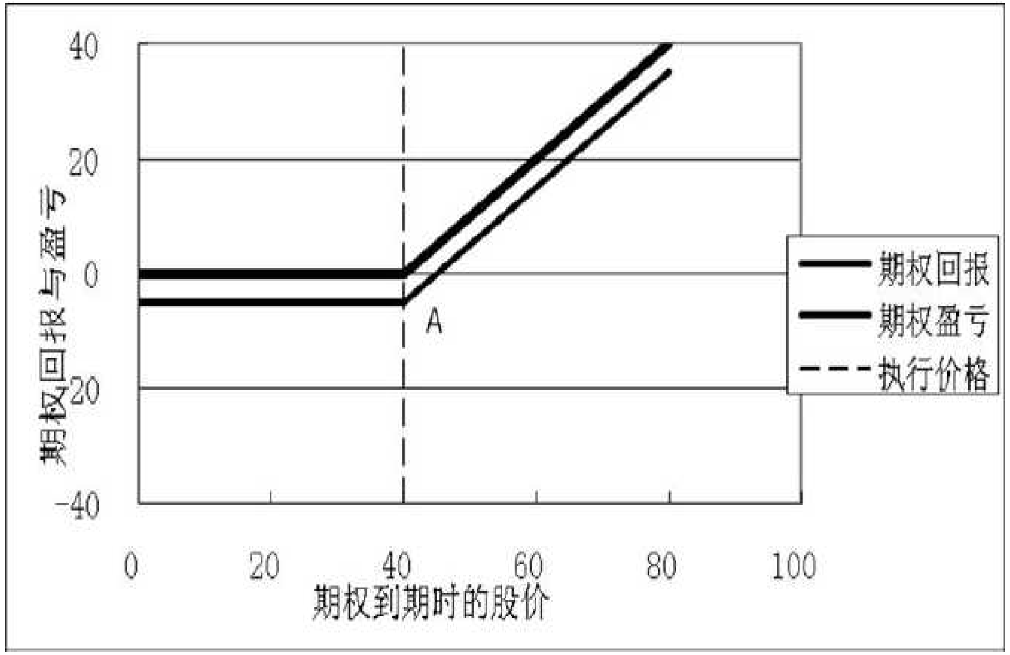
(四)期权的盈亏

- **看涨期权的盈亏分布**
- 看涨期权买者的回报和盈亏分布图如图所示。在图中有两条线，一是回报(Payoff)，二是盈亏。前者未考虑期权费，后者则扣除了期权费。
- 由于期权合约是零和游戏,买者的回报和盈亏和卖者的回报和盈亏刚好相反,据此我们可以画出看涨期权卖者的回报和盈亏分布图如图所示。
- 从图中可以看出，看涨期权买者的亏损风险是有限的，其最大亏损限度是期权价格，而其盈利可能却是无限的。相反，看涨期权卖者的亏损可能是无限的，而盈利是有限的，其最大盈利限度是期权价格。期权买者以较小的期权价格为代价换来了较大盈利的可能性，而期权卖者则为了赚取期权费而冒着大量亏损的风险。

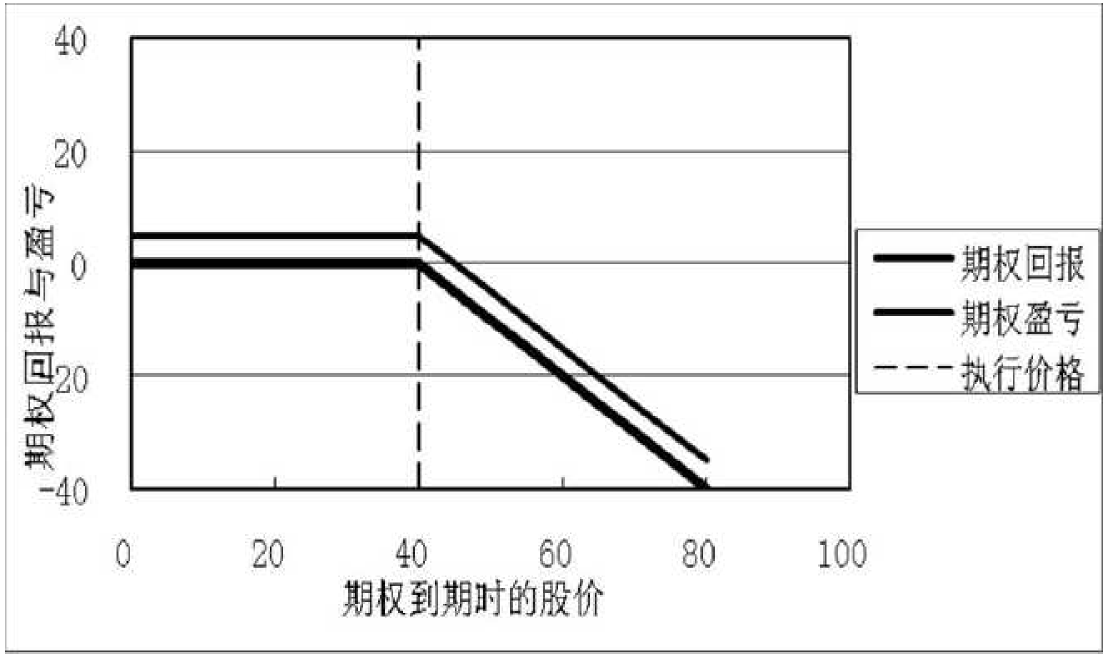
一些符号说明

符号	说　明
S_0、S_t	标的资产的现价，标的资产t 时刻的价格
K	期权的执行价格
T	期权的到期日
t	期权到期日前的某一时刻
T-t	期权距离到期的剩余时间
S_T	标的资产在期权到期日的价格
r	以连续复利计算的t时刻的无风险利率
c/C	欧式/美式看涨期权的价格
p/P	欧式/美式看跌期权的价格

看涨期权多头的回报与盈亏分布

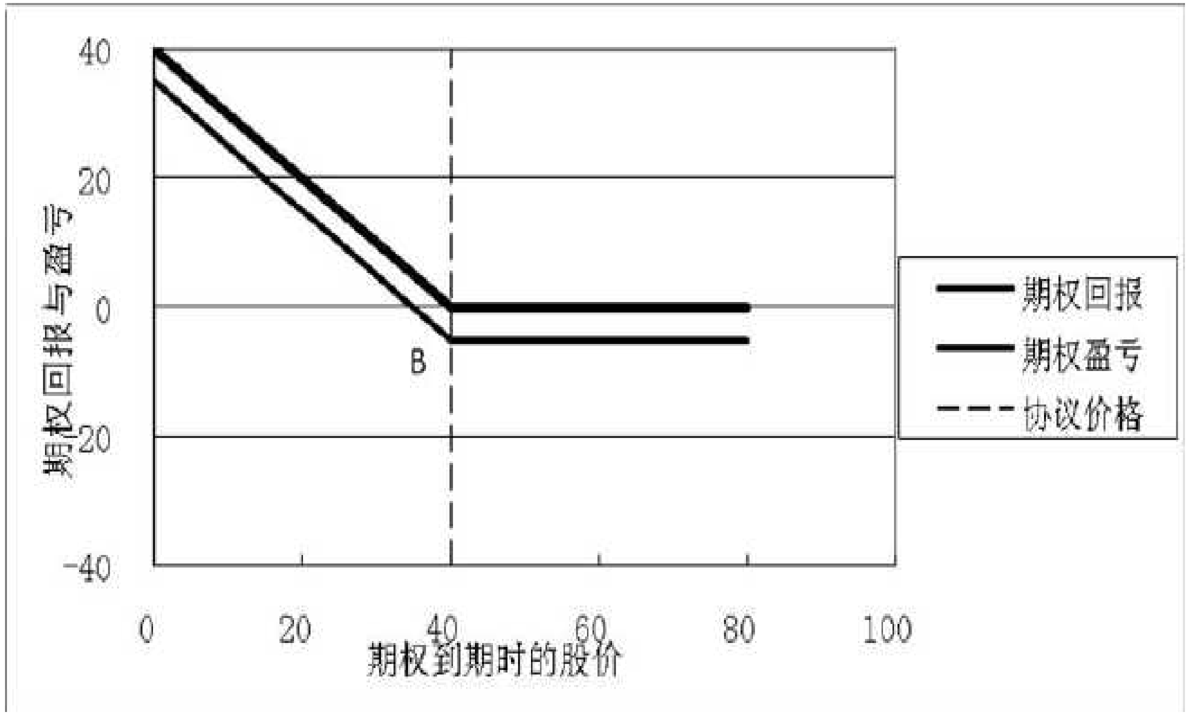


看涨期权空头的回报与盈亏分布

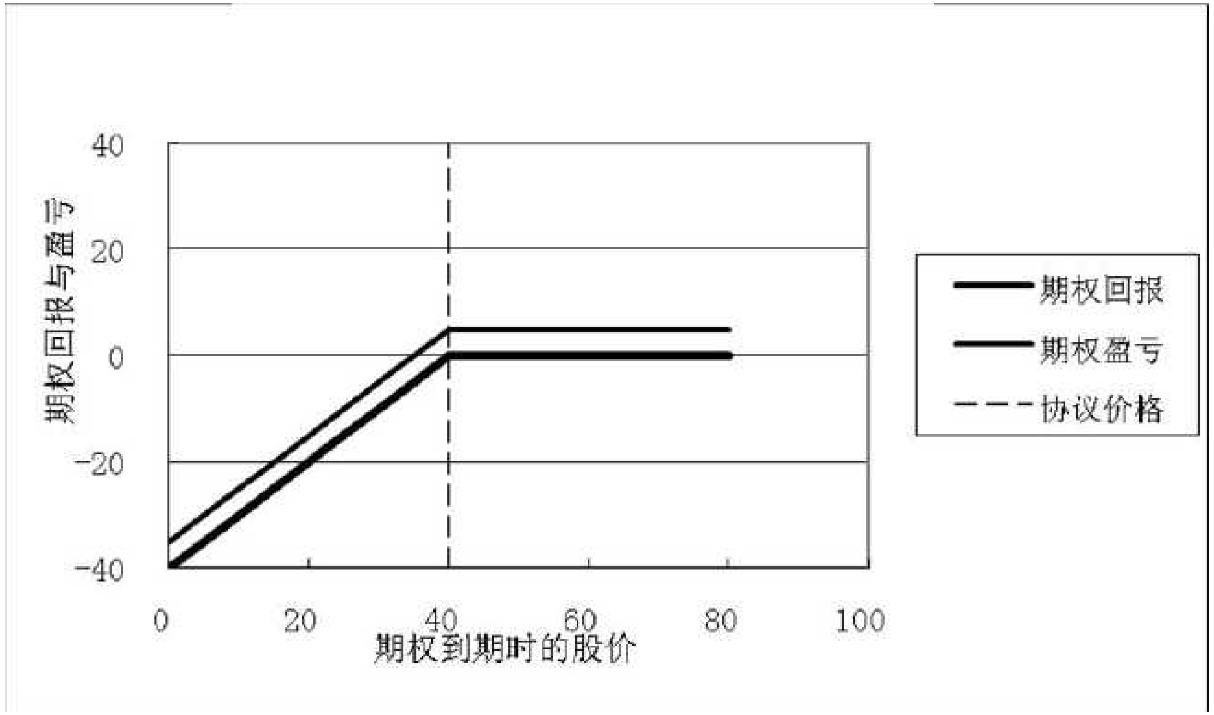


看跌期权的盈亏分布

看跌期权多头的回报与盈亏分布



看跌期权空头的回报与盈亏分布



欧式期权到期回报和盈亏公式

头寸	到期回报公式		到期盈亏公式
	公式	分析	
看涨期权多头	$\max(S_T - X, 0)$	若到期价格 S_T 高于 X，多头执行期权获得差价；否则放弃期权回报为零。	$\max(S_T - X, 0) - c$
看涨期权空头	$-\max(S_T - X, 0)$ 或 $\min(X - S_T, 0)$	若到期价格 S_T 高于 X，多头执行期权，空头损失差价；否则多头放弃期权，空头回报为零。	$-\max(S_T - X, 0) + c$ 或 $\min(X - S_T, 0) + c$
看跌期权多头	$\max(X - S_T, 0)$	若到期价格 S_T 低于 X，多头执行期权获得差价；否则放弃期权回报为零。	$\max(X - S_T, 0) - p$
看跌期权空头	$-\max(X - S_T, 0)$ 或 $\min(S_T - X, 0)$	若到期价格 S_T 低于 X，多头执行期权，空头损失差价；否则多头放弃期权，空头回报为零。	$-\max(X - S_T, 0) + p$ 或 $\min(S_T - X, 0) + p$

注：这里的X为期权的执行价格

（五）期权价格的上下限

1、期权价格的上限

2、欧式期权价格的下限

（1）无红利标的资产情况

（2）有红利标的资产情况

3、美式期权价格的下限（提前执行美式期权的合理性）

1、期权价格的上限

（1）看涨期权价格的上限

在任何情况下，期权的价值都不会超过标的资产的价格。否则的话，套利者就可以通过买入标的资产并卖出期权来获取无风险利润。因此，对于美式和欧式看跌期权来说，标的资产价格都是看涨期权价格的上限：

$$c \le S \text{和} C \le S$$

其中，c代表欧式看涨期权价格，C代表美式看涨期权价格，S代表标的资产价格。

（2）看跌期权价格的上限

由于美式看跌期权的多头执行期权的最高价值为执行价格（X），因此，美式看跌期权价格（P）的上限为X:

$$P \leq X$$

由于欧式看跌期权只能在到期日（T时刻）执行，在T时刻，其最高价值为X，因此，欧式看跌期权价格（p）不能超过X的现值：

$$p \leq Xe^{-r(T-t)}$$

同时需注意的是，具有相同到期日、相同执行价格的欧式、美式期权而言，由于美式期权具有提前执行条款，则有：

$$C_t \geq c_t \qquad P_t \geq p_t$$

2、欧式期权价格的下限

（1）欧式看涨期权价格的下限

➢无红利资产欧式看涨期权价格的下限

考虑如下两个组合:

组合A：一份欧式看涨期权加上金额为 $Xe^{-r(T-t)}$ 的现金

组合B：一单位标的资产

在组合A中，如果现金按无风险利率投资则在T时刻将变为X，即等于执行价格。此时多头要不要执行看涨期权，取决于T时刻标的资产价格（S_T）是否大于X。若$S_T>X$，则执行看涨期权，组合A的价值为S_T；若$S_T \le X$，则不执行看涨期权，组合A 的价值为X。因此，在T时刻，组合A 的价值为：

$$\max(S_T - X, 0) + X = \max(S_T, X)$$

而在T时刻，组合B的价值为S_T。

由于 $\max(S_T, X) \ge S_T$

根据无套利原理，在t时刻组合A的价值也应大于等于组合B，即：

$$C + Xe^{-r(T-t)} \ge S \quad \text{即} \quad C \ge S - Xe^{-r(T-t)}$$

由于期权的价值一定为正，因此无红利资产欧式看涨期权价格下限为：

$$c \ge \max[S - Xe^{-r(T-t)}, 0]$$

➢有红利资产欧式看涨期权价格的下限

设D为有效期内资产收益的现值，只需将上述A组合中的现金改为 $D+Xe^{-r(T-t)}$，经过类似的推导就可得到有红利资产欧式看涨期权价格的下限为：

$$c \geq \max\{S - D - Xe^{-r(T-t)}, 0\}$$

（2）欧式看跌期权价格的下限

- 无红利欧式看跌期权价格下限

构造以下两个组合加以分析：

组合A：一份欧式看跌期权加上一单位标的资产；

组合B：金额为 $Xe^{-r(T-t)}$ 的现金。

在T时刻，如果$S_T<X$，期权将被执行，组合A价值为X；如果$S_T>X$，期权将不被执行，组合A价值为S_T，即组合A的价值为： $\max(S_T, X)$

而组合B的价值为X

根据无套利原理，在t时刻，组合A的价值肯定大于等于组合B，即 $\max(S_T, X) \geq X$

所以 $p + S \geq Xe^{-r(T-t)}$ 即 $p \geq Xe^{-r(T-t)}\text{-}S$

由于期权的价值肯定为正，所以无红利欧式看跌期权的价格下限为：

$$p \geq \max\{Xe^{-r(T-t)}\text{-}S, 0\}$$

➢有红利资产欧式看跌期权价格的下限

只需将上述组合B的现金改为 $D+Xe^{-r(T-t)}$

就可得有红利资产欧式看跌期权价格的下限为：

$$p \geq \max[D+Xe^{-r(T-t)}-S,0]$$

3、美式期权价格的下限（提前执行无红利资产美式期权的合理性）

（1）无红利资产美式看涨期权

考虑如下两个组合:

组合A：一份美式看涨期权加上金额为 $Xe^{-r(T-t)}$

组合B：一单位标的资产

在T时刻，组合A的现金变为X，组合A的价值为max（S_T，X）。而组合B的价值为S_T，可见，组合A在T时刻的价值一定大于等于组合B。这意味着，如果不提前执行，组合A的价值一定大于等于组合B。

提前执行美式期权的情况，如在 τ 时刻提前执行，则提前执行看涨期权所得盈利等于S_τ–X，其中S_τ 表示 τ 时刻标的资产的市价，

而此时现金金额变为 $Xe^{-r(T-\tau)}$ (假设利率不变），因此，若提前执行的话，

τ 时刻组合A的价值为 $S_\tau - X + Xe^{-r(T-\tau)}$ ，而组合B的价值为S_τ ，

由于 $Xe^{-r(T-\tau)} < X$

这就是说,若提前执行美式期权的话，组合A的价值将小于组合B，

由此，提前执行无红利资产美式看涨期权是不明智的。因此，同一种无红利标的资产的美式看涨期权和欧式看涨期权的价值是相同的，即：

$$C_t = c_t$$

因此，无红利资产美式看涨期权价格的下限为 $C \geq \max[S - Xe^{-r(T-t)}, 0]$

（2）无红利资产美式看跌期权下限

首先美式期权的价格不低于欧式期权，因为美式期权可在到期前的任何时刻行权，因此可以得到以下公式：

$$P \geq p \geq \max\{Xe^{-r(T-t)}\text{-}S,0\}$$

其次，考虑到美式期权可在到期日前以执行价格X行权，若，

$P \leq X - S$ 则会出现套利机会，套利者可以以*P*的价格买进期权，然后立即执行，获得X-S的收益。所以对于美式看跌期权而言，还应满足以下公式：

$$P \geq \max\{X - S, 0\}$$

因为

$$X - S \geq Xe^{-r(T-t)} - S$$

所以无红利资产美式看跌期权的价格下限为:

$$P \geq \max\{X - S, 0\}$$

提前执行无红利资产美式看跌期权的合理性

- 构造组合
  - 组合 A： 一份美式看跌期权加一单位标的资产
  - 组合 B： 金额为 $Xe^{-r(T-t)}$ 的现金
- 若不提前执行，则到 T 时刻，组合 A 的价值为 $\max(S_T, X)$ ，组合 B 的价值为 X ，因此组合 A 的价值大于等于组合 B 。
- 若在τ时刻提前执行，组合 A 的价值为 X ，组合 B 的价值为 $Xe^{-r(T-\tau)}$ ，因此组合 A 的价值也高于组合 B 。
- 提前执行无红利资产美式看跌期权是可能的。

4、美式期权价格的下限（提前执行有红利资产美式期权的合理性）

（1）有红利资产美式看涨期权

由于提前执行有红利资产的美式期权可较早获得标的资产，从而获得现金收益，而现金收益可以派生利息，因此在一定条件下，提前执行有红利资产的美式看涨期权有可能是合理的。

我们假设在期权到期前，标的资产有n个除权日，t_1，t_2……，t_n为除权前的瞬时时刻，在这些时刻之后的收益分别为D_1，D_2，……，D_n，在这些时刻的标的资产价格分别为S_1，S_2，……S_n。

由于在无红利的情况下，不应提前执行美式看涨期权，我们可以据此得到一个推论：在有红利情况下，只有在除权前的瞬时时刻提前执行美式看涨期权方有可能是最优的。因此我们只需推导在每个除权日前提前执行的可能性。

我们先来考察在最后一个除权日（t_n）提前执行的条件。如果在t_n时刻提前执行期权，则期权多方获得S_n-X的收益。若不提前执行，则标的资产价格将由于除权降到S_n-D_n。

于是，在t_n时刻期权的价值（C_n）

$$C_n \geq c_n \geq \max[S_n - D_n - Xe^{-r(T-t_n)}, 0]$$

因此，如果：

$$S_n - D_n - Xe^{-r(T-t_n)} \geq S_n - X$$

即：

$$D_n \le X[1-e^{-r(T-t_n)}]$$

则在t_n提前执行是不明智的。

相反，如果

$$D_n > X[1-e^{-r(T-t_n)}]$$

则在t_n提前执行有可能是合理的

同样，对于任意 $i<n$,

在t_i时刻不能提前执行有红利资产的美式看涨期权条件是：

$$D_i \le X[1-e^{-r(t_{i+1}-t_i)}]$$

由于存在提前执行更有利的可能性，有红利资产的美式看涨期权价值大于等于欧式看涨期权，其下限为：

$$C \ge c \ge \max[S-D-Xe^{-r(T-t)},0]$$

（2）有红利资产美式看跌期权

由于提前执行有红利资产的美式期权意味着自己放弃收益权，因此收益使美式看跌期权提前执行的可能性变小，但还不能排除提前执行的可能性。

通过同样的分析，我们可以得出美式看跌期权不能提前执行的条件是：

$$D_i \geq X[1-e^{-r(t_{i+1}-t_i)}]$$

$$D_n \geq X[1-e^{-r(T-t_n)}]$$

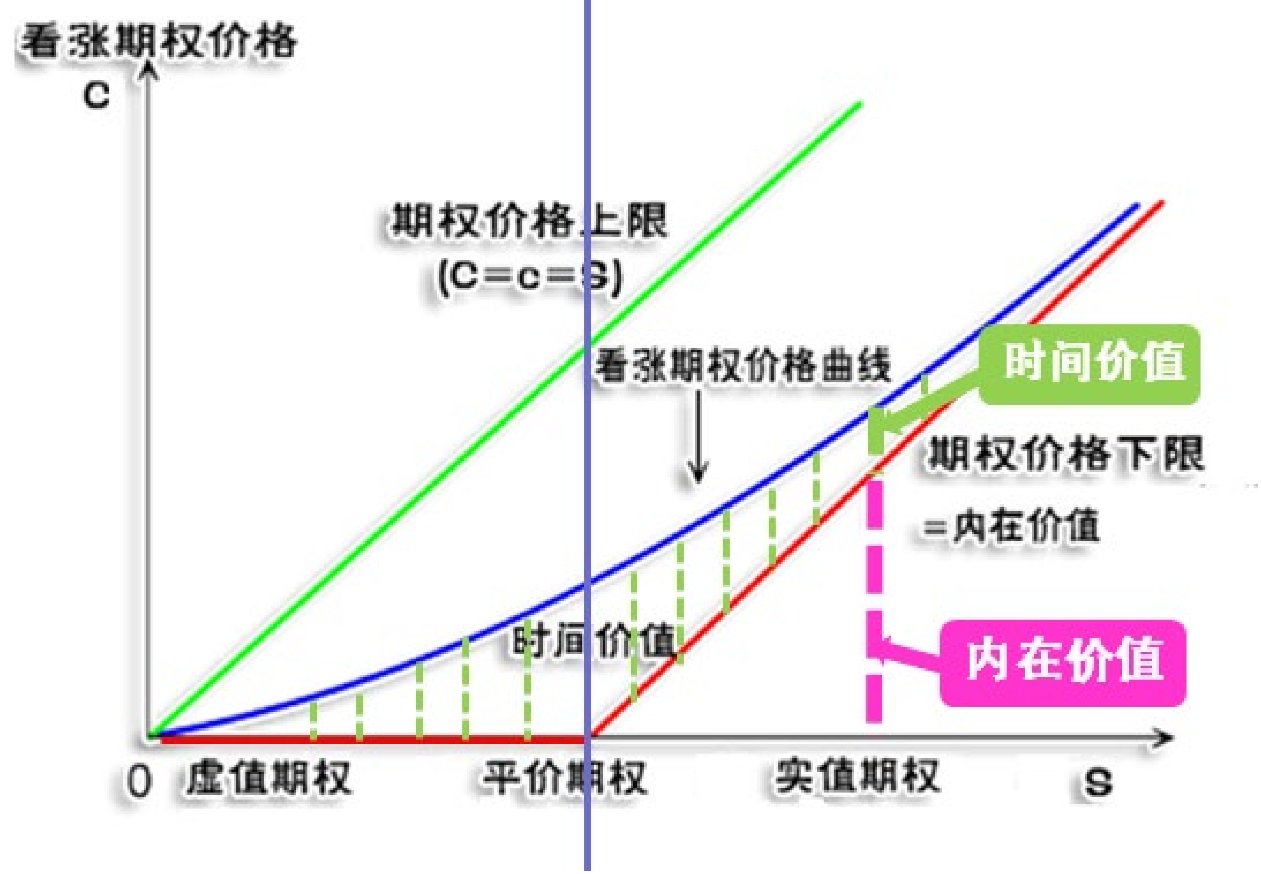
由于美式看跌期权有提前执行的可能性，因此其下限为：

$$P \geq \max(D+X-S,0)$$

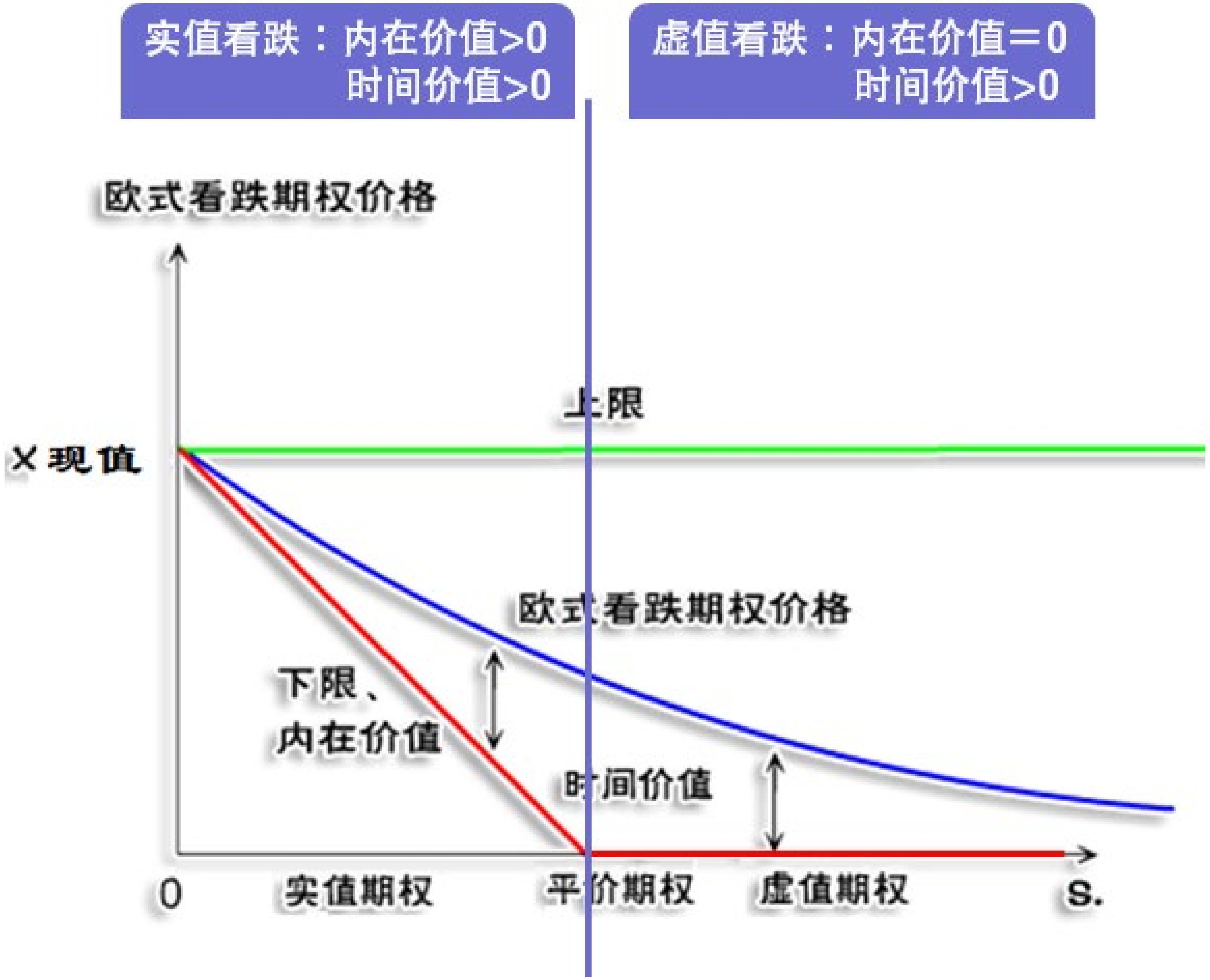
附： 无红利资产 欧式看涨期权价格曲线

虚值看涨：内在价值=0
时间价值>0

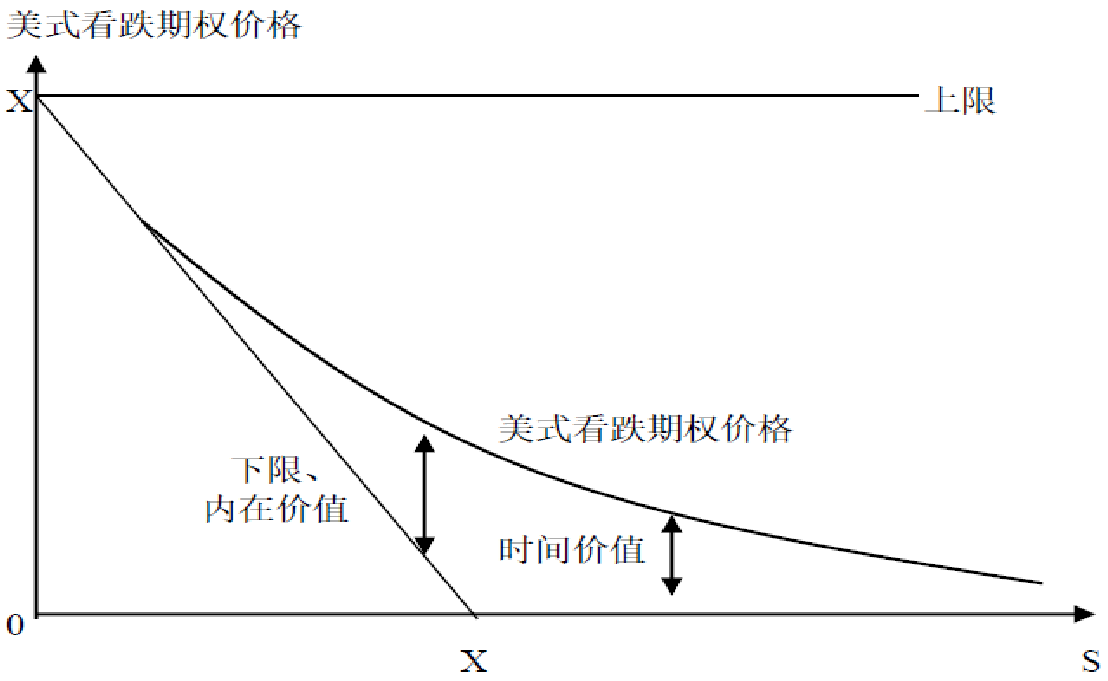
实值看涨：内在价值>0
时间价值>0



附： 无红利资产 欧式看跌期权价格曲线



附： 无红利资产美式看跌期权价格曲线



（六）期权的平价关系

（A）欧式看涨期权与看跌期权之间的平价关系

1、无红利资产的欧式期权

在标的资产没有收益的情况下，为了推导c和p之间的关系，我们考虑如下两个组合：

组合A：一份欧式看涨期权加上金额为 $Xe^{-r(T-t)}$的现金

组合B：一份有效期和执行价格与看涨期权相同的欧式看跌期权加上一单位标的资产

在期权到期时，两个组合的价值均为max(S_T,X)。由于欧式期权不能提前执行，因此两组合在时刻t必须具有相等的价值，即：

无红利资产的欧式期权平价关系

$$c + Xe^{-r(T-t)} = p + S$$

2、有收益资产欧式期权

在标的资产有收益的情况下，我们只要把前面的组合A中的现金改为 $D + Xe^{-r(T-t)}$

有收益资产欧式看涨期权和看跌期权的平价关系：

$$c + D + Xe^{-r(T-t)} = p + S$$

Nankai University 南開大學

（B）美式看涨期权和看跌期权之间的关系

1、无红利资产美式期权

由于 $P \geq p, C = c$ ，以及 $c + Xe^{-r(T-t)} = p + S$

可得 $P \geq p = c + X\mathrm{e}^{-r(T-t)} - S = C + X\mathrm{e}^{-r(T-t)} - S$

从而

$$C - P \leq S - Xe^{-r(T-t)}$$

同时，考虑如下两个组合

组合A：一份欧式看涨期权加上金额为X的现金

组合B：一份美式看跌期权加上一单位标的资产

如果美式期权没有提前执行，则在T时刻组合B的价值为max(S_T,X)，而此时组合A的价值为

$$\max(S_T, X) + Xe^{r(T-t)} - X$$

因此组合A的价值大于组合B。

如果美式期权在 τ 时刻提前执行，则在 τ 时刻组合B的价值为X，而此时组合A的价值大于等于 $Xe^{r(\tau-t)}$，因此组合A的价值也大于组合B。

这就是说，无论美式组合是否提前执行，组合A的价值都高于组合B，因此在t时刻，组合A的价值也应高于组合B，即：

$$c+X \geq P+S$$

由于c=C，因此，
$$C+X \geq P+S$$

$$C-P \geq S-X$$

综上可得无红利资产美式期权平价关系

$$S - X \le C - P \le S - Xe^{-r(T-t)}$$

2、有红利资产美式期权

我们只要把组合A的现金改为D+X，就可得到有红利资产美式期权必须遵守的不等式：

$$S - D - X \le C - P$$

同时，有红利时，红利的发放将减少美式期权看涨期权的价值，增加看跌期权的价值，因此仍然会有无红利的关系式

$$C - P \le S - Xe^{-r(T-t)}$$

因此，有红利资产美式期权平价关系式为

$$S - D - X \le C - P \le S - Xe^{-r(T-t)}$$

期权价格上下限表

			上限	下限
欧式	看涨	无红利	S	$\max[S-Xe^{-r(T-t)},0]$
		有红利	S	$\max[S-D-Xe^{-r(T-t)},0]$
	看跌	无红利	$Xe^{-r(T-t)}$	$\max[Xe^{-r(T-t)}-S,0]$
		有红利	$Xe^{-r(T-t)}$	$\max[D+Xe^{-r(T-t)}-S,0]$
美式	看涨	无红利	S	$\max[S-Xe^{-r(T-t)},0]$
		有红利	S	$\max[S-D-Xe^{-r(T-t)},0]$
	看跌	无红利	X	$X-S$
		有红利	X	$\max(D+X-S,0)$

（七）期权的其他性质

设 $c_t(K)$ 、$p_t(K)$ 为执行价格K的欧式看涨、看跌期权的价格

1、对于两个具有相同到期日的欧式期权，当 $K_1 > K_2$ 时，有

$$0 \le c_t(K_2) - c_t(K_1) \le K_1 - K_2$$

$$0 \le p_t(K_1) - p_t(K_2) \le K_1 - K_2$$

2、$c_t(K)$ 、$p_t(K)$ 是执行价格K的凸函数，即设 $K_1 > K_2$ ，

$$K_\lambda = \lambda K_1 + (1-\lambda)K_2 \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

则有

$$c_t(K_\lambda) \le \lambda c_t(K_1) + (1-\lambda)c_t(K_2)$$

$$p_t(K_\lambda) \le \lambda p_t(K_1) + (1-\lambda)p_t(K_2)$$

设 $S_t(K)$ 是标的资产的价格

3、对任意的 $\lambda > 0$ ，有

$$c_t(\lambda S_t, \lambda K) = \lambda c_t(S_t, K)$$

$$p_t(\lambda S_t, \lambda K) = \lambda p_t(S_t, K)$$

即期权价格的一次齐次性

对于美式期权亦有上述类似的性质。（略）

附： $c_t(K)$ 是 执行价格K的凸函数的证明

在t时刻考虑两个策略（t<T）

Φ_1 ： λ份执行价格为 K_1 的欧式看涨期权 与

（1-λ）份执行价格为 K_2 的欧式看涨期权

Φ_2 ： 1份执行价格为 K_λ 的欧式看涨期权

在到期日T时刻

$$V_T(\Phi_1) = \lambda(S_T - K_1)^+ + (1-\lambda)(S_T - K_2)^+$$

$$V_T(\Phi_2) = (S_T - K_\lambda)^+$$

（1） 当 $S_T \geq K_1$ 时

$$V_T(\Phi_1) = S_T - K_\lambda = V_T(\Phi_2)$$

（2） 当 $K_\lambda \leq S_T \leq K_1$ 时

$$V_T(\Phi_1) = (1-\lambda)(S_T - K_2)$$

$$V_T(\Phi_2) = (S_T - K_\lambda) = \lambda(S_T - K_1) + (1-\lambda)(S_T - K_2)$$

有

$$V_T(\Phi_1) > V_T(\Phi_2)$$

（3） 当 $K_2 < S_T < K_\lambda$ 时

$$V_T(\Phi_1) = (1-\lambda)(S_T - K_2)$$

$$V_T(\Phi_2) = 0$$

有

$$V_T(\Phi_1) > V_T(\Phi_2)$$

（4）当 $S_T < K_2$ 时

$$V_T(\Phi_1) = V_T(\Phi_2) = 0$$

综上，在T时刻

$$V_T(\Phi_1) \ge V_T(\Phi_2)$$

且 $P\{V_T(\Phi_1) > V_T(\Phi_2)\}>0$

根据无套利原理

$$V_t(\Phi_1) > V_t(\Phi_2)$$ 需证明的不等式不等号成立

同时，取 $\lambda = 0$或1时，需证明的不等式等号成立

因此有 $c_t(K_\lambda) \le \lambda c_t(K_1) + (1-\lambda) c_t(K_2)$

作业6

设c_1、c_2和c_3分别表示协议价格为X_1、X_2、X_3的欧式看涨期权的价格，其中$X_3>X_2>X_1$ 且$X_3-X_2=X_2-X_1$，所有期权的到期日相同，

证明: $c_2 \le 0.5(c_1 + c_3)$

作业7

对于两个具有相同到期日的欧式期权，当 $K_1 > K_2$ 时，有

$$c_t(K_2) - c_t(K_1) \leq K_1 - K_2$$