第二节布莱克-斯科尔斯期权定价模型

一、有效市场假说与马尔可夫过程

1965年，法玛（Fama）提出了著名的有效市场假说

有效市场假说分为三类：弱式、半强式和强式

马尔科夫过程(Markov process)是一个特殊类型的随机过程，其中只有标的变量的当前值与未来的预测有关，而变量的历史值以及变量从过去到现在的演变方式与未来的预测无关。

弱式有效市场假说可用马尔可夫过程来表述

通常假设证券价格服从马尔科夫过程，如果证券价格遵循马尔可夫过程，该过程具有“无后效性”，其未来价格的概率分布只取决于该证券现在的价格。也就是，通过历史数据不能预测未来

B-S模型假设标的资产的价格服从几何布朗运动，它是一种特殊的马尔可夫过程。

二、 布朗运动 维纳过程

布朗运动（Brownian Motion）起源于物理学中对完全浸没于液体或气体中的小粒子运动的描述，以发现这种现象的英国植物学家罗伯特·布朗（Robert Brown）命名。然而真正用于描述布朗运动的随机过程的定义是维纳（Wiener）给出的，因此布朗运动又称维纳过程。

- 标准布朗运动的四大特征：
  - 初值为零
  - 连续（关于时间t）
  - 独立增量：对于任何两个不同时间间隔 Δt， Δw 的值相互独立
  - 独立同分布：增量均服从均值零、方差等于时间长度的正态分布

对于随机变量w是标准布朗运动，具有两个性质:

1、在某一小段时间Δt内，它的变动Δw与时段Δt满足

$$\Delta w_t = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$$

这里，$\Delta w_t = w_t - w_{t-1}, \varepsilon_t \sim iidN(0,1)$

2、在两个不重叠的时段Δt和Δs, Δw_t和Δw_s是独立的，即增量独立

$$\mathrm{cov}(\Delta w_t, \Delta w_s) = 0$$

其中，$\Delta w_t = w_t - w_{t-1}, \Delta w_s = w_s - w_{s-1}$

$$w_{t-1} < w_t < w_{s-1} < w_s$$

由此，可得

$$E(\Delta w_t) = 0, D(\Delta w_t) = \Delta t$$

ΔW_t本身具有正态分布特征，其均值为0，标准差为$\sqrt{\Delta t}$，方差为 Δt

当时段的长度放大到T时（从现在的0时刻到未来的T时刻）随机变量Δw_T满足

$$E(\Delta w_T) = 0, \Delta w_T = w_T - w_0$$

$$D(\Delta w_T) = T$$

或者

$$w_T \sim N(0, T)$$

$$w_{t-s} \sim N(0, t-s); \quad (w_t - w_s) \sim N(0, t-s), t > s$$

这里 $\Delta t = \frac{T}{N}$

$$\Delta w_T = w_T - w_0 = \sum_{i=1}^{N} \Delta w_i , \Delta w_i = w_i - w_{i-1} = \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta w_T = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} = \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i$$

$$E(\Delta w_T) = \sqrt{\Delta t} E(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i) = \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^{N} E(\varepsilon_i) = 0$$

$$D(\Delta w_T) = \Delta t \cdot D(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i) = \Delta t \cdot N = T, [\because D(\varepsilon_i) = 1]$$

在连续时间下，可得到

$$dw_t = \varepsilon_t \sqrt{dt}$$

$$\operatorname{cov}(dw_t, dw_s) = 0 \qquad t \neq s$$

所以，dw_t 概率分布的性质

$$dw_t \sim N(0, dt)$$

$$E(dw_t) = 0, D(dw_t) = dt$$

三、 伊藤Itô引理

对于一般的布朗运动可表示为（其中，a、b为常数）

$$dx_t = adt + bdw_t$$

其中，$dw_t \sim N(0, dt)$

则一般的布朗运动有

$$dx_t \sim N(adt, b^2 dt)$$

$$E(dx_t) = adt, D(dx_t) = b^2 dt$$

若把变量x_t的a和b当作变量x和时间t的函数，扩展后得到的即为Itô过程

$$dx_t = a(x,t)dt + b(x,t)dw_t$$

B-S 期权定价模型是根据ITO过程的特例－几何布朗运动来代表股价的波动

$$s_t = x_t, a(s_t,t) = \mu s_t, b(s_t,t) = \sigma s_t$$

$$ds_t = \mu s_t dt + \sigma s_t dw_t$$

这里，μ、σ为常数，且称μ为漂移率，σ为波动率

省略下标t，得到几何布朗运动方程

$$\frac{ds}{s} = \mu dt + \sigma dw$$

μ为证券收益率期望值
σ为证券收益率单位时间的标准差

对于离散时间模型

在短时间Δt 后，证券价格比率的变化值为 $\frac{\Delta S}{S}$

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

$\frac{\Delta S}{S}$ 符合 $\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t})$

其中 $\phi(m, s)$ 表示均值为m，标准差为s的正态分布

伊藤（Itô）引理：假设某随机变量 x 的变动过程可由Itô过程表示

$$dx_t = a(x_t, t)\,dt + b(x_t, t)\,dw_t$$

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_s, s)\,ds + \int_0^t b(x_s, s)\,dw_s$$

$$\int_0^t |a_s|\,ds < \infty, \mathbb{E}\left[\int_0^t b_s^2\,ds\right] < \infty$$

省略下标时

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dw$$

令f(x,t)为随机变量x以及时间t的函数，且作为二元函数至少二次连续可微。则f(x,t)的变动过程可以表示为

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}b \cdot dw$$

$$f = f(x,t), a = a(x,t), b = b(x,t)$$

粗略证明：

1、离散化

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\Delta w$$

$$\Delta w = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

2、利用泰勒展开，f(x,t)可以展开为

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\Delta x \Delta t$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2 + \ldots$$

在连续时间下，即 $\Delta t \to 0$ **从而** $\Delta t^2 \to 0$ $\Delta t^{\frac{3}{2}} \to 0$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x \Delta t = a\Delta t^2 + b\varepsilon\Delta t^{\frac{3}{2}} = 0$$

因此，忽略 Δt **的高阶项，可以改写为**

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2$$

$$\Delta x^2 = [a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}]^2$$

$$= a^2\Delta t^2 + b^2\varepsilon^2\Delta t + 2ab\varepsilon\Delta t^{\frac{3}{2}}$$

$$= b^2\varepsilon^2\Delta t$$

3、当Δt→0时，可得

$$
\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(adt + bdw) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2dt \\
&= (\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial f}{\partial x}b \cdot dw
\end{aligned}
$$

四、 几何布朗运动与对数正态分布

若股票价格服从几何布朗运动

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t$$

设当前时刻为t，则T时刻股票价格满足对数正态分布，即

$$\ln S_T \sim N[\ln S_t + (\mu - \sigma^2 / 2)\tau, \sigma^2 \tau]$$

$$\tau = T - t, t \in [0, T]$$

令 $g = g(S_t) = \ln S_t$ 则

$$\frac{\partial g}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}, \frac{\partial^2 g}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2}, \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

这样由伊藤引理得到 $(a = \mu S_t dt, b = \sigma S_t)$

$$dg = (\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial S_t^2}(\sigma S_t)^2)dt + \frac{\partial g}{\partial S_t}\sigma S_t \cdot dw$$

$$= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dw$$

即 $d(\ln S_t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dw$

$$\int_t^T d(\ln S_t) = \int_t^T (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dw$$

$$\ln S_T - \ln S_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau + \sigma(w_T - w_t)$$

$$w_T - w_t = \varepsilon\sqrt{\tau} \qquad \varepsilon \sim iidN(0,1)$$

$$\ln S_T = \ln S_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau + \sigma\sqrt{\tau}\varepsilon$$

$$\ln S_T \sim N[\ln S_t + (\mu - \sigma^2/2)\tau, \sigma^2\tau]$$

由于 $\ln S_T \sim N[\ln S_t + (\mu - \sigma^2/2)\tau, \sigma^2\tau]$

则称S_T服从对数正态分布，其期望值为

$$E(S_T) = S_t \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau] \cdot E[\exp(\sigma\sqrt{\tau}\varepsilon)]$$

$$E[\exp(\sigma\sqrt{\tau}\varepsilon)] = \exp(\sigma^2\tau/2)$$

所以 $E(S_T) = S_t \exp(\mu\tau)$

注意：$E[\exp(\sigma\sqrt{\tau}\varepsilon)] \neq \exp[\sigma\sqrt{\tau}E(\varepsilon)]$

五、 B-S模型的推导

Black、Scholes和Merton由于在期权定价中的重要贡献，Scholes和Merton也因此获得1997年的诺贝尔经济学奖

1、模型的基本假设

- 期权为欧式期权
- 无风险利率r已知，且为一个常数
- 在期权期限内，股票不支付股息
- 证券交易为连续进行

- 无交易费用和税收
- 不存在无风险套利机会
- 所有证券均可无限分割
- 可以卖空证券，并且可以完全使用所得收入
- 标的资产为股票，其价格S的变化为几何布朗运动，且σ、μ 为常数

$$\frac{ds}{s} = \mu dt + \sigma dw \Rightarrow ds = \mu s dt + \sigma s dw$$

其中，w代表标准布朗运动

注意：如果我们考虑衍生产品在一时间t (而不是时间 0) 时的价格。

设T是到期日，那么期权的期限是T-t=τ。

2、B-S定价模型过程思路

Ito过程 $dx_t = a(x,t)dt + b(x,t)dw_t$

标的资产的运动方式 $ds = \mu s dt + \sigma s dw$

衍生品价格函数*f* 是*S*，*t* 的函数，即*f =f(S,t)*

Ito引理 $$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}b \cdot dw$$

对冲策略：S与f 构造组合，成为无风险组合

B-S微分方程 $$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s}rs + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\sigma^2 s^2 = rf$$

B-S定价公式 $$C = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

3、B-S微分方程

假设标的资产价格变动过程满足

$$ds = \mu sdt + \sigma sdw$$

这里S为标的资产当前的价格，设 f 是依赖于 S 的衍生证券的价格，则 f 一定是 S 和t 的函数，即f(S,t)的形式，根据伊藤引理可得：

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s}\mu s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\sigma^2 s^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial s}\sigma s \cdot dw$$

在一个小的时间间隔 Δt 中， f 的变化值 Δf 满足

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s}\mu s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\sigma^2 s^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial s}\sigma s \cdot \Delta w$$

下面我们利用对冲的方法给出B-S微分方程

构造以Δ份的标的资产空头和1个单位的看涨期权多头来构造一个组合（对冲的结果为使组合价值为无风险的）

组合价值为

$$V = f - \Delta S$$

于是

$$dV = df - \Delta dS$$

利用Ito引理，得

$$dV = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s}\mu s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\sigma^2 s^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial s}\sigma s \cdot dw$$
$$-\Delta(\mu s dt + \sigma s dw)$$

由于对冲使组合成为无风险的，则

$$dV = rVdt$$

$$= r(f - \Delta S)dt$$

于是，

$$r(f - \Delta S) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s}\mu s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\sigma^2 s^2\right) - \Delta \mu S$$

$$\frac{\partial f}{\partial S}\sigma S = \Delta\sigma S$$

可得 $$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$$

将Δ代入上面第一个等式，得

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

此式即为B-S的微分方程

但需注意的是其定解条件为：t=T 时， $f = (S_T - K)^+$

这是一个反向的问题。

4、 B-S欧式看涨期权定价公式

对于欧式不支付红利的股票期权，其看涨期权的在定价日t的定价公式为

$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2)$$

其中， $$d_1 = \frac{\ln(S_t / K) + (r + \sigma^2 / 2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

$$t \in [0, T], \tau = T - t$$

Black-Scholes 方程的解

(孙健《金融衍生品定价模型——数理金融引论》P102-106)

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf. \tag{5.27}$$

其成立的定义域为 $S\in(0,\infty), t\in(0,T)$。这一节中，在无风险利率 r 和波动率 σ 为常数的情况下，我们求出它的闭形式解。为了达到这个目的，我们确立变换方程的指导方针。第一，要把时间倒置。在 Black-Scholes 方程中，要

给出终值条件，即 f 在到期日的收益函数。但是在数学物理的抛物方程中，一般要给初值条件。第二，要作代换，使得 Black-Scholes 方程变为常系数微分方程。为此首先作如下换元：

$$f(S,t)=e^{-r(T-t)}V(S,t),$$

这样我们就得到关于函数 V 的新方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=0. \tag{5.28}$$

接下来设

$$s=\log S, \tag{5.29}$$

这样

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial S}&=\frac{\partial V}{\partial s}\frac{1}{S},\\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}&=\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\frac{1}{S^2}-\frac{\partial V}{\partial s}\frac{1}{S^2};\end{aligned}$$

将它们代入方程 (5.28)，我们有

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial V}{\partial s}=0. \tag{5.30}$$

这是一个常系数抛物型方程。现在设

$$x=s+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t),$$

$$\tau=(T-t),$$

我们有

$$\frac{\partial V}{\partial s}=\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-\frac{\partial V}{\partial \tau}-\frac{\partial V}{\partial x}(r-\frac{1}{2}\sigma^2).$$

代回到方程 (5.30)，V 作为 x 和 τ 的函数满足以下方程：

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \tag{5.31}$$

熟知，在数学物理中这个方程被称为*热传导方程* (Heat Equation)。给定初始条件

$$V(x,0) = h(x), \tag{5.32}$$

它的解可以表示为积分形式

$$V(\tau, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-y,\tau)h(y)\,dy. \tag{5.33}$$

其中，函数 $u(x,t)$ 被称为*热核* (Heat Kernel)。我们可以对方程 (5.31) 使用傅立叶变换得到热核的闭的表达形式：

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2\tau}}.$$

现在回到方程 (5.27)，我们知道，对任何有以下收益函数的衍生产品，

$$f(S,T)=h(S),$$

其相应的变换函数 V 为

$$V(x,0)=h(e^x).$$

代回方程 (5.33)，得到，

$$f(S,t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\log S+(r-\sigma^2/2)(T-t)-y)^2}{2\sigma^2(T-t)}}h(e^y)\,dy; \qquad (5.34)$$

或者再作一次换元 $y=\log S'$，我们有

$$f(S,t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{(\log S+(r-\sigma^2/2)(T-t)-\log S')^2}{2\sigma^2(T-t)}}\frac{h(S')}{S'}\,dS'. \quad (5.35)$$

到此为止，至少在形式上我们给出了 Black-Scholes 方程的解。

现在我们把刚才得到的方程用在看涨、看跌期权的定价上。在讨论任何期权时，我们需要用到下列记号：S_0 是标的资产当前时刻的价格，S_T 是标的资产在 T 时刻的价格，K 是执行价格。我们仍然用 r 表示利率。看涨期权的收益函数为

$$\max(S_T - K, 0).$$

看跌期权的收益函数为

$$\max(K - S_T, 0).$$

利用方程 (5.34)和收益函数

$$h(S) = \max(S - K, 0), \quad h(S) = \max(K - S, 0),$$

我们得到下列看涨期权的闭形式公式:

$$
\begin{aligned}
C^{Eu}(K,t;S) &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\log S+(r-\sigma^2/2)(T-t)-y)^2}{2\sigma^2(T-t)}}(e^y-K)^+\,dy \\
&= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma}\int_{\log K}^{+\infty} e^{-\frac{(\log S+(r-\sigma^2/2)(T-t)-y)^2}{2\sigma^2(T-t)}}e^y\,dy \\
&\quad - \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma}K\int_{\log K}^{+\infty} e^{-\frac{(\log S+(r-\sigma^2/2)(T-t)-y)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\,dy \\
&= S\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_1}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx - e^{-r(T-t)}K\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&= S\mathrm{N}(d_1) - e^{-r(T-t)}K\mathrm{N}(d_2);
\end{aligned}
$$

其中,

$$
d_1 = \frac{\log(S/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}},
$$

$$
d_2 = \frac{\log(S/K)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.
$$

这样一来，我们得到

$$C^{Eu}(K,t;S) = SN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2). \tag{5.36}$$

对于看跌期权，类似地，

$$P^{Eu}(K,t;S) = e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - SN(-d_1). \tag{5.37}$$

例:

$S_o = 100$　　　　$K = 95$

$r = 0.10$　　　　$T = 0.25$　　　　$\sigma = 0.50$

$d_1 = [\ln(100/95) + (0.10+(0.5^2/2))] / (0.5 \times 0.25^{1/2})$

$= 0.43$

$d_2 = 0.43 + ((0.5)(0.25^{1/2})$

$=0.18$

$N(0.43) = 0.6664$,　$N(0.18) = 0.5714$

$$C_o = S_oN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

$$C_o = 100 \text{ X } .6664 - 95\ e^{-\ .10 \text{ X } .25} \text{ X } .5714$$
$$= 13.70$$

附：风险中性下B-S定价公式推导（南京大学课件）

Nankai University

（1）设当前时刻为t，到期时刻T，若股票价格服从几何布朗运动，若已经当前时刻t的股票价格为S_t,则T时刻的股票价格的期望值为

$$E(S_T) = S_t \exp[\mu(T-t)]$$

$$= S_t \exp(\mu\tau)$$

根据B-S微分方程可知，定价是在风险中性条件下，则资产的期望回报为无风险回报，则

$$E(S_T) = S_t \exp(r\tau)$$

（2）在风险中性的条件下，任何资产的贴现率为无风险利率r，故欧式看涨期权期望值的现值为

$$C_t = e^{-r\tau}E[\max(S_T - X, 0)]$$

$$= \begin{cases} e^{-r\tau}E(S_T - X), S_T > X \\ 0, S_T \le X \end{cases}$$

$$= e^{-r\tau}\int_X^{\infty}(S_T - X)f(S_T)dS_T + \int_0^X 0\cdot f(S_T)dS_T$$

$$= e^{-r\tau}\int_X^{\infty}(S_T - X)f(S_T)dS_T \qquad (7.16)$$

- 由于S_T服从对数正态分布，其pdf为

$$f(S_T)=\frac{1}{S_T\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}}\exp[\frac{-(\ln S_T-E(\ln S_T))^2}{2\sigma^2\tau}]$$

将$\ln S_T \square s, E(\ln S_T) \square \bar{s}, u \square \sigma\sqrt{\tau}$ **由(7.16)得到**

$$C_t=e^{-r\tau}\int_X^{\infty}\frac{1}{u\sqrt{2\pi}}\exp[\frac{-(s-\bar{s})^2}{2u^2}]dS_T \qquad \textbf{(7.17)}$$

第1项

$$-Xe^{-r\tau}\int_X^{\infty}\frac{1}{S_T}\frac{1}{u\sqrt{2\pi}}\exp[\frac{-(s-\bar{s})^2}{2u^2}]dS_T$$

第2项

(3) 化简(7.17)中的第1、2项，先化简第1项

$$e^{-r\tau}\int_X^\infty \frac{1}{u\sqrt{2\pi}}\exp[\frac{-(s-\bar{s})^2}{2u^2}]dS_T$$

$$=S_t\exp(-\ln S_t)e^{-r\tau}\int_X^\infty \exp(\ln S_T)\frac{1}{S_T}\frac{1}{u\sqrt{2\pi}}\exp[\frac{-(s-\bar{s})^2}{2u^2}]dS_T$$

当前时刻价格，不是变量

$$=S_t\int_X^\infty \exp(\ln S_T-\ln S_t-r\tau)\frac{1}{S_T}\frac{1}{u\sqrt{2\pi}}\exp[\frac{-(s-\bar{s})^2}{2u^2}]dS_T$$

(7.18)

因为$E(\ln S_T) = \ln S_t + (\mu - \sigma^2/2)\tau$，则

$$\ln S_t = E(\ln S_T) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau$$

由于$E(\ln S_T)$□$\bar{s}$，$\mu = r$，所以

$$\ln S_T - \ln S_t - r\tau$$

$$= s - (\bar{s} - (r - \sigma^2/2)\tau) - r\tau$$

$$= s - (\bar{s} + \sigma^2\tau/2)$$

$$= s - (\bar{s} + u^2/2) \qquad \textbf{(7.19)}$$

将（7.19）与（7.18）内的第2个指数项合并，即

$$s-(\bar{s}+u^2/2)+\frac{-(s-\bar{s})^2}{2u^2}$$

$$=(1/2u^2)[2u^2s-2u^2(\bar{s}+u^2/2)-(s-\bar{s})^2]$$

$$=(1/2u^2)[2u^2s-2u^2\bar{s}-u^4-s^2+2s\bar{s}-\bar{s}^2]$$

$$=(1/2u^2)[2s(u^2+\bar{s})-(\bar{s}^2+2u^2\bar{s}+u^4)-s^2]$$

$$=-(1/2u^2)[s-(u^2+\bar{s})]^2 \qquad \textbf{(7.20)}$$

将（7.20）代入（7.18）

$$S_t\int_X^{\infty}\frac{1}{S_T}\frac{1}{u\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{[s-(u^2+\bar{s})]^2}{2u^2}\right)dS_T \qquad \textbf{(7.21)}$$

下面，将利用变量代换来简化（7.21），不妨令

$$y=\frac{s-(u^2+\bar{s})}{u}$$

所以，$dy=\frac{1}{u}ds=\frac{1}{u}d(\ln S_T)=\frac{1}{uS_T}dS_T$

Nankai University

$$y = \frac{s-(u^2+\bar{s})}{u} = \frac{\ln S_T - [\sigma^2\tau + E(\ln S_T)]}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

根据对数正态分布的性质，前文已经证明

$$E(\ln S_T) = \ln S_t + (r-\sigma^2/2)\tau$$

$$y = \frac{\ln S_T - [\sigma^2\tau + \ln S_t + (r-\sigma^2/2)\tau]}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$= \frac{\ln S_T - \ln S_t - (r+\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

y的积分下限为

$$y|_{S_T=X}=\frac{\ln X-\ln S_t-(r+\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$=-\frac{\ln(S_t/X)+(r+\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\triangleq -d_1$$

y的积分上限为

$$y|_{S_T=\infty}=\frac{\ln\infty-\ln S_t-(r+\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}=\infty$$

将dy与y代入（7.21），即有

$$S_t\int_X^{\infty}\frac{1}{S_T}\frac{1}{u\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{[s-(u^2+\bar{s})]^2}{2u^2})dS_T$$

$$=S_t\int_{-d_1}^{\infty}\frac{1}{S_T}\frac{1}{u\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2})uS_T dy$$

$$=S_t\int_{-d_1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2})dy$$

$$=S_t[1-N(-d_1)]=S_tN(d_1) \tag{7.22}$$

这样就完成了第1项的证明。

下面证明B-S公式中的第2项，

$$-Xe^{-r\tau}\int_X^{\infty}\frac{1}{S_T}\frac{1}{u\sqrt{2\pi}}\exp[\frac{-(s-\overline{s})^2}{2u^2}]dS_T$$

首先进行变量代换，令 $z=(s-\overline{s})/u$

$$dz=\frac{ds}{u}=\frac{d(\ln S_T)}{u}=\frac{1}{uS_T}dS_T$$

$$dS_T=uS_Tdz$$

- 则z的积分下限

$$z|_{S_T=X}=\frac{s-\bar{s}}{u}|_{S_T=X}=\frac{\ln S_T-\ln S_t-(r-\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}|_{S_T=X}$$

$$=\frac{\ln X-\ln S_t-(r-\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$=-\frac{\ln(S_t/X)+(r-\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$\square -d_2$$

- **z的积分上限** $z|_{S_T=\infty}=\infty$

- 将z和dz代入

$$-Xe^{-r\tau}\int_X^{\infty}\frac{1}{S_T}\frac{1}{u\sqrt{2\pi}}\exp[\frac{-(s-\overline{s})^2}{2u^2}]dS_T$$

$$=-Xe^{-r\tau}\int_{-d_2}^{\infty}\frac{1}{S_T}\frac{1}{u\sqrt{2\pi}}\exp[\frac{-z^2}{2}]uS_T dz$$

$$=-Xe^{-r\tau}\int_{-d_2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp[\frac{-z^2}{2}]dz$$

$$=-Xe^{-r\tau}[1-N(-d_2)]$$

$$=-Xe^{-r\tau}[N(d_2)] \qquad \textbf{(7.23)}$$

则由（7.22）和（7.23）得到

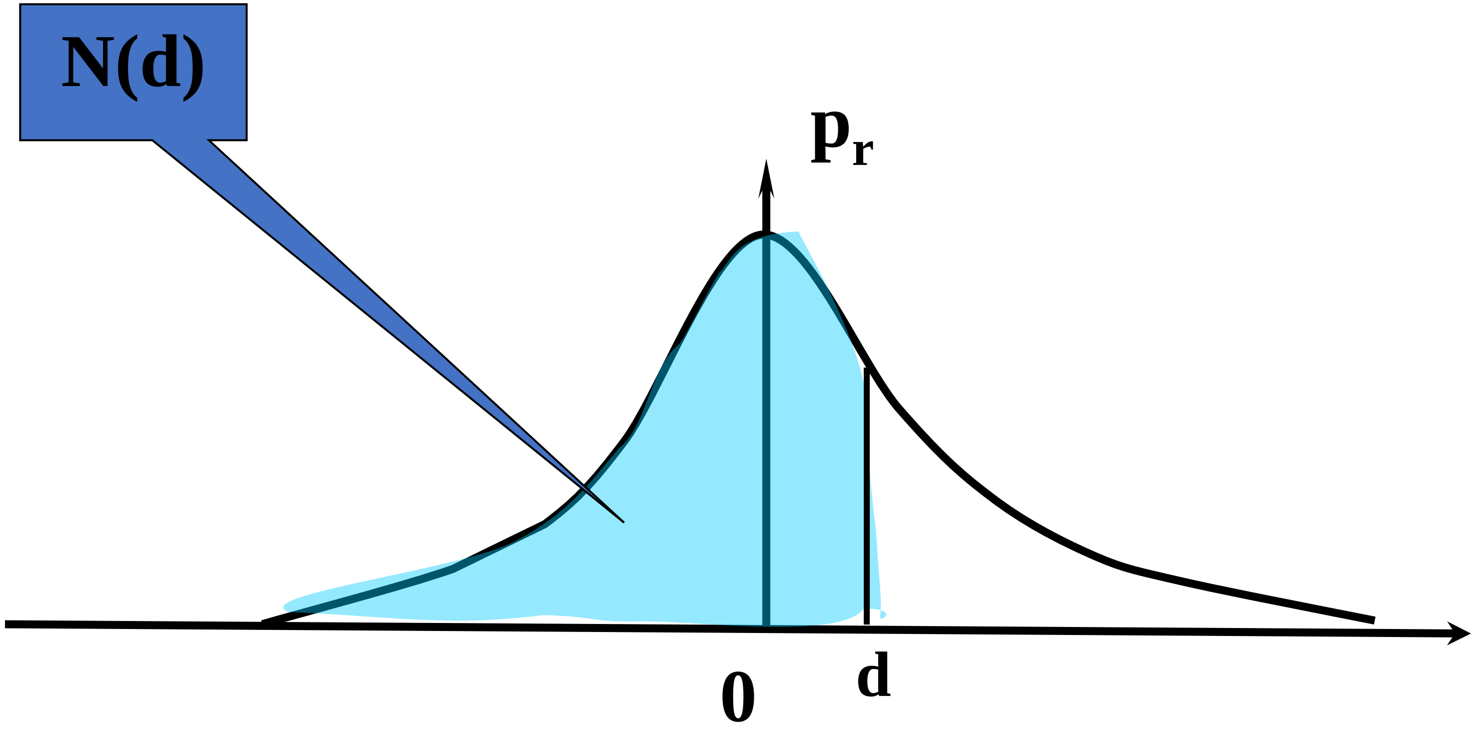
$$C_t = S_t N(d_1) - Xe^{-r\tau} N(d_2)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S_t / X) + (r + \sigma^2 / 2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t / X) + (r - \sigma^2 / 2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$= d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$



例如:当d＝1.96时,N(d)＝97.5%

（4）B-S模型的意义

- 由Z的积分下限可知，$N(d_2)$是在风险中性世界中S_T大于X的概率，或者说式欧式看涨期权被执行的概率。
- $X\ e^{-r(T-t)}N(d_2)$是X的风险中性期望值的现值。$S_tN(d_1)= e^{-r(T-t)}S_T\ N(d_1)$是$S_T$的风险中性期望值的现值。

$$-Xe^{-r\tau}\int_X^{\infty}\frac{1}{S_T}\frac{1}{u\sqrt{2\pi}}\exp[\frac{-(s-\overline{s})^2}{2u^2}]dS_T$$

$$=-Xe^{-r\tau}[N(d_2)]$$

$$C_t = e^{-r(T-t)} E[\max(S_T - X, 0)]$$

$$= \begin{cases} e^{-r(T-t)} E[S_T \mid S_T > X] - e^{-r(T-t)} [X \mid S_T > X] \\ 0, S_T \le X \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-r(T-t)} E[S_t e^{r(T-t)} \mid S_T > X] - e^{-r(T-t)} [X \mid S_T > X] \\ 0, S_T \le X \end{cases}$$

$$C_t = S_t N(d_1) - X e^{-r\tau} N(d_2)$$

$$S_t N(d_1) = e^{-r(T-t)} [S_t e^{r(T-t)} N(d_1)]$$

- 其次, $\delta = N(d_1)$是复制交易策略中股票的数量，$S_tN(d_1)$就是资产的市值, $-Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$则是复制交易策略中负债的价值。
  - 假设$S_t>x$，$\tau \to 0$,则两个$N(d)$均为1，看涨期权价值为S_t-X，则没有不确定性。如果确实执行了，就获得了以S_t为现价的股票的所有权，而承担了X的债务。
- 期权的价值关于标的资产的价格及其方差，以及到期时间等5个变量的非线性函数$C_t=f(S_t,X,\tau,\sigma,r)$的函数。

5、 欧式看跌期权的定价

利用欧式看涨看跌期权平价关系

$$p_t + S_t = c_t + Ke^{-r(T-t)}$$

得

$$p_t = c_t + Ke^{-r(T-t)} - S_t$$

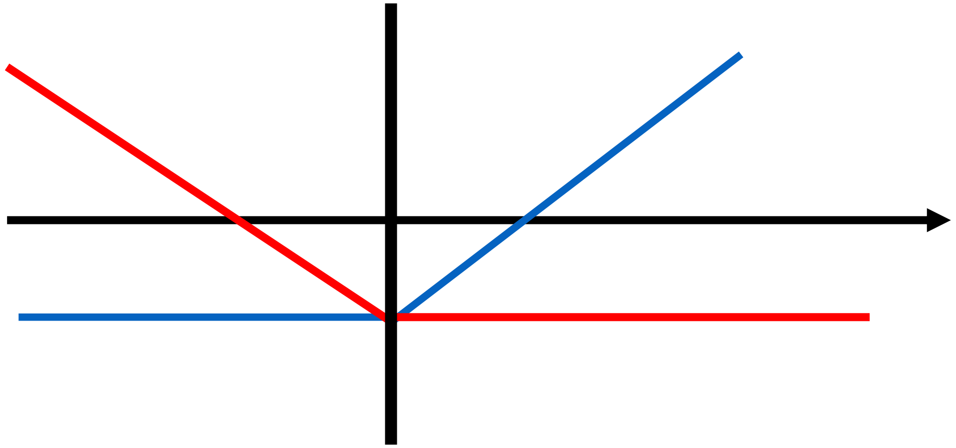
由于$c_t = S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2)$

所以 $$p_t = S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2) + K e^{-r(T-t)} - S_t$$

$$= K e^{-r(T-t)} (1 - N(d_2)) - S_t (1 - N(d_1))$$

$$= K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

从图形上看，二者对影响期权的关键指标都进行了变换，是关于纵向对称的。



$$c_t = c_t(S_t, d_1, d_2, K)$$
$$= S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2)$$

$$p_t = c_t(-S_t, -d_1, -d_2, -K)$$
$$= -S_t N(-d_1) - (-K)\, e^{-r\tau} N(-d_2)$$
$$= Ke^{-r\tau} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

作业10

假设某种不支付红利股票的市价为50元，风险利率为10%，该股票的年波动率为30%，求该股票协议价格为50元、期限3个月的欧式看跌期权价格。

6、 B-S公式中几个主要的希腊字母

根据泰勒公式对期权价格进行二阶展开，忽略高阶项

Delta

Theta

Vega

Rho

$$\Delta c=\frac{\partial c}{\partial s}\cdot\Delta s+\frac{\partial c}{\partial t}\cdot\Delta t+\frac{\partial c}{\partial \sigma}\cdot\Delta\sigma+\frac{\partial c}{\partial r}\cdot\Delta r$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\cdot(\Delta S)^2+\mathrm{O}(3)$$

Gamma

7、B-S期权定价公式的参数估计问题

- 期权定价公式中的期权价格取决于下列五个参数：标的资产市场价格、执行价格、到期期限、无风险利率和标的资产价格波动率
- 在这些参数当中，前三个都是很容易获得的确定数值。但是无风险利率和标的资产价格波动率则需要进行估计。
- 到期期限、无风险利率和波动率的时间单位必须相同（通常为年）。

（1）估计无风险利率

- 使用连续复利的即期利率
- 美国：国债利率；中国：银行存款利率/国债市场即期利率
- 选择距离期权到期日最近的利率

(2）估计标的资产价格的波动率

- 历史波动率
  - 样本对数收益率标准差
  - 广义自回归条件异方差模型（Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity，GARCH）和随机波动率模型
- 隐含波动率

六、美式期权

1、对于美式看涨期权（无分红），同欧式看涨期权

2、对于美式看涨期权（有分红），美式看涨期权有提前执行的可能，因此有收益资产美式期权的定价较为复杂，布莱克提出了一种近似处理方法。该方法是先确定提前执行美式看涨期权是否合理。若不合理，则按欧式期权处理；若在t_n提前执行有可能是合理的，则要分别计算在T时刻和t_n时刻到期的欧式看涨期权的价格，然后将二者之中的较大者作为美式期权的价格。在大多数情况下，这种近似效果都不错。

3、对于美式看跌期权，一般采用数值方法

七、模型的应用

1、有收益资产的期权定价公式
2、外汇期权
3、期货期权
4、利率模型（略）
5、多资产期权（略）

1、有收益资产的期权定价公式

（1）当标的资产已知收益的现值为D时，我们只要用（S－D）代替公式中的S即可求出欧式看涨和看跌期权的价格。

（2）标的资产在期权的有效期内连续支付股息，q是每单位时间的股息率，这时，具有股息收益的股票期权的偏微分方程为

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial s}(r-q)s+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\sigma^2 s^2=rf$$

此时，将S改为 $se^{-q\tau}$

即有

$$c = Se^{-q\tau}N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(Se^{-q\tau}/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(Se^{-q\tau}/K) + (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln(S/K) + (r - q - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

2、欧式外汇期权模型

1983，Garman和Kohlhagen推导出来，设外币连续利率为r_f，r为本币利率，汇率为S，则，

$$c = Se^{-r_f\tau}N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - r_f + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

3、 欧式期货期权的定价模型

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2}\sigma^2 F^2 = cr$$

$$C = Fe^{-q\tau}N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

$$\xrightarrow{r=q} e^{-r\tau}[FN(d_1) - KN(d_2)]$$

其中，$d_1 = \dfrac{\ln(F/K)+(\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$

$$d_2 = \frac{\ln(F/K)-(\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

4、利率模型（略）

5、多资产期权（略）

附：鞅、测度变换、期权定价

1、离散时间期权定价

股票价格的运动方式、股票价格贴现过程、价值过程、离散时间鞅、测度变换、对冲策略、复制策略。

2、连续时间期权定价

布朗运动、鞅、伊藤积分、伊藤引理、哥萨诺夫定理、价值过程、对冲策略、复制策略

3、计价单位变换

4、多资产期权定价