第三节希腊字母

Delta

Theta

Gamma

Vega

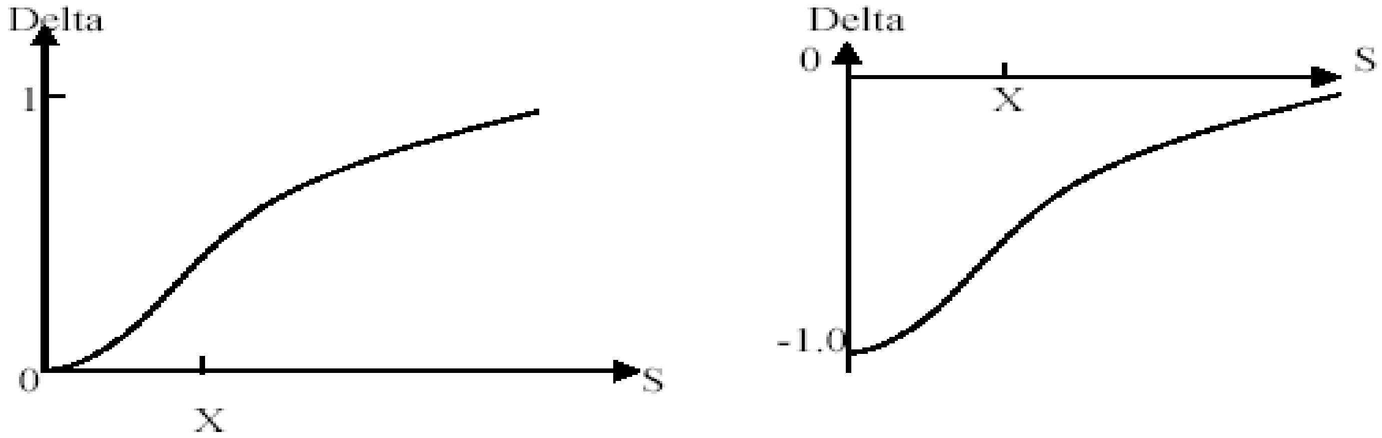
Rho

期权价格受标的资产现价、期权执行价格、距离到期时间、无风险利率、标的资产价格波动率、标的资产红利等因素影响，对不同影响因素的变化关系用不同的希腊字母表示，期权价格关于影响因素的敏感性因素分析又被称为希腊字母分析（Greeks analysis），常用的希腊字母分析包括Delta、Gamma、Theta、Rho、Vega等。

1、Delta

Delta描述了**衍生证券的价格**变化对其**标的资产价格**变化的比率。

$$\Delta_c = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) > 0 \qquad \Delta_p = \frac{\partial p}{\partial S} = \Delta_c - 1 < 0$$

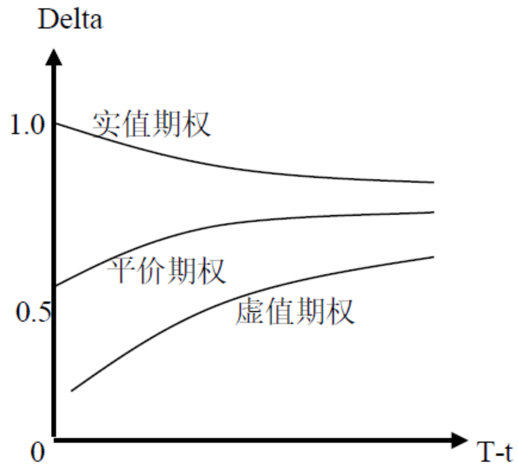


(a) 看涨期权　　(b)看跌期权

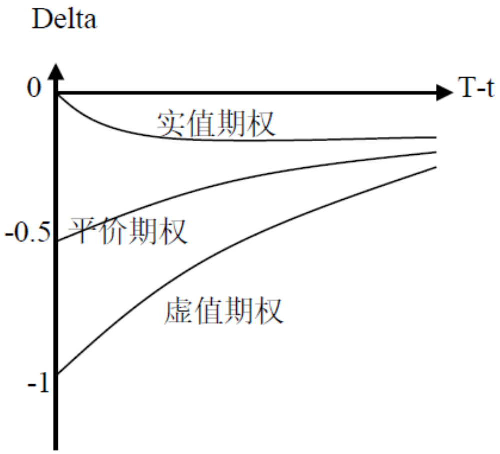
根据累积标准正态分布函数的性质可知： $0 < N(d_1) < 1$

因此无收益资产看涨期权的 Δ ，在（0, 1）之间

另外，从 $N(d_1)$ 函数的特征还可得出无收益资产看涨期权和欧式看跌期权在实值、平价和虚值三种状况下的Δ值与到期期限之间的关系

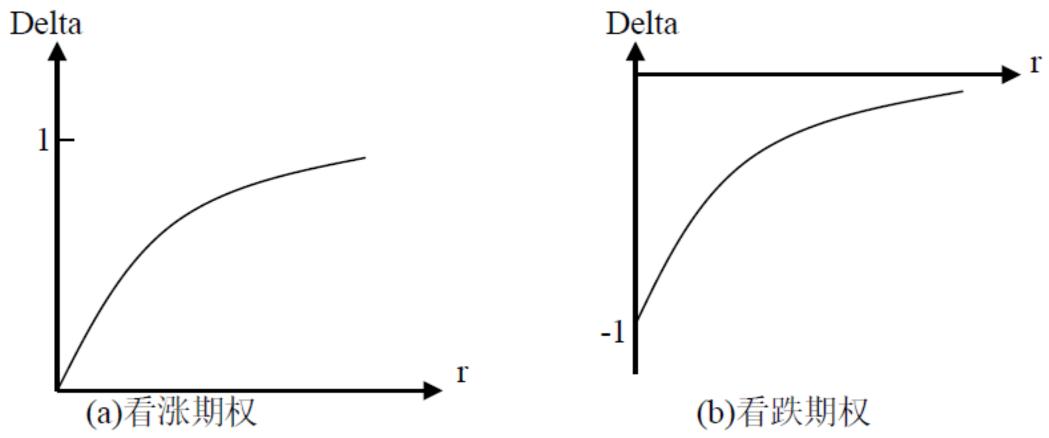


(a)看涨期权



(b)看跌期权

此外，无风险利率水平越高，无收益资产看涨期权和欧式看跌期权的Δ值也越高



证明：欧式看涨期权的Delta=N(d_1)

Nankai University 南开大学

$$\text{证明:}\frac{\partial C}{\partial S}=N(d_1)+S\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial S}-Xe^{-rT}\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}\cdot\frac{\partial d_2}{\partial S}$$

$$\text{由于}\frac{\partial d_1}{\partial S}=\frac{\partial d_2}{\partial S},\text{则}$$

$$Xe^{-r\tau}\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}=Xe^{-r\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_2^2}{2}}\right)$$

$$=\frac{Xe^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(d_1^2-2\sigma\sqrt{\tau}d_1+\sigma^2\tau)\right)$$

$$=Xe^{-r\tau}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_1^2}\cdot e^{d_1\sigma\sqrt{\tau}-\frac{\sigma^2\tau}{2}}\right]$$

$$\text{且由于}\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_1^2}$$

$$Xe^{-r\tau}\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}$$

$$=Xe^{-r\tau}\cdot\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}e^{\ln(s/X)+r\tau}$$

$$=Xe^{-r\tau}\cdot\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{S}{X}e^{r\tau}$$

$$=S\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}$$

$$d_1=\frac{\ln(S_t/X)+(r+\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$e^{d_1\sigma\sqrt{\tau}-\frac{\sigma^2\tau}{2}}$$

所以，最后两项相等，则$\frac{\partial C}{\partial S}=N(d_1)$，命题成立。

由于标的资产和衍生证券可取多头或空头，因此其Δ值可正可负，这样，若组合内标的资产和衍生证券数量配合适当的说，整个组合的Δ值就可能等于0。我们称Δ值为0的证券组合处于Delta中性状态。

当证券组合处于Δ中性状态时，组合的价值在一个短时间内就不受标的资产价格的影响，从而实现了瞬时套期保值，因此我们将使证券组合的Δ值等于0的套期保值法称为Δ中性保值法。

注：组合的Δ值为 $\Delta = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i$

关于Δ对冲的一个示例

（赫尔，《期权，期货及其其他衍生产品》第19章）

例：某金融机构以 300 000美元的价格卖出了100 000份无股息股票的欧式看涨期权。假设股票 价格为49美元，期权执行价格为50美元，无风险利率为每年5%, 股票价格的 波动率为每年20%, 期权期限为20周(0.3846年），股票的收益率期望为每年 13%。

$$S_0 = 49, K = 50, r = 0.05, \sigma = 0.20, T = 0.3846, \mu = 0.13$$

注：根据B-S公式，期权价格大约为2.4，即卖出的理论值应为240000

虽然卖出高出60000，但仍面临对冲风险，下面是对冲过程

$$d_1 = \frac{\ln(49/50) + (0.05 + 0.2^2/2) \times 0.3846}{0.2 \times \sqrt{0.3846}} = 0.0542$$

Delta 为 $N(d_1)$，即 0.522。当股票价格变化为 ΔS 时，期权价格变化为 $0.522\Delta S$。

我们计算了所卖出期权在 最初的Delta为0.522, 因而所有期权空头的Delta为-100 000 x0. 522, 即-52 200。

这意味着 在出售看涨期权的同时， 交易员必须借入2 557 800美元并按每股49美元价格购买52 200只股 票。

借入资金的利率为5%, 第一周的利息费用大约为2 500美元。

表 19-2　Delta 对冲模拟（期权为实值期权；对冲费用为 263 300 美元）

周数	股票价格	Delta	购买股票数量	购买股票费用（千美元）	累计现金流（千美元）	利息费用（千美元）
0	49.00	0 522	52 200	2 557.8	2 557.8	2 5
1	48 12	0.458	(6 400)	(308.0)	2 252.3	2 2
2	47 37	0.400	(5 800)	(274.7)	1 979.8	1.9
3	50 25	0 596	19 600	984.9	2 966.6	2.9
4	51 75	0.693	9 700	502.0	3 471 5	3.3
5	53 12	0.774	8 100	430.3	3 905.1	3.8
6	53 00	0 771	(300)	(15.9)	3 893.0	3.7
7	51.87	0.706	(6 500)	(337.2)	3 559.5	3.4
8	51.38	0.674	(3 200)	(164.4)	3 398.5	3.3
9	53.00	0 787	11 300	598.9	4 000.7	3 8
10	49.88	0.550	(23 700)	(1 182 2)	2 822 3	2.7
11	48.50	0.413	(13 700)	(664.4)	2 160.6	2.1
12	49 88	0.542	12 900	643.5	2 806.2	2 7
13	50.37	0 591	4 900	246 8	3 055.7	2.9
14	52 13	0.768	17 700	922 7	3 981.3	3.8
15	51.88	0.759	(900)	(46.7)	3 938.4	3 8
16	52.87	0.865	10 600	560.4	4 502.6	4 3
17	54.87	0.978	11 300	620.0	5 126 9	4 9
18	54 62	0.990	1 200	65 5	5 197.3	5.0
19	55 87	1 000	1 000	55.9	5 258.2	5.1
20	57.25	1.000	0	0.0	5 263 3	

在表中，1周以后股票价格降到了48. 12美元， 期权的Delta也随之降到了0.458, 期权头寸新的Delta为-45 800。

要想保持Delta中性， 这时需要从已持有的股票中卖出6400只 股票。 卖出股票所得现金收人为308 000美元, 因此第1周后的累计借款余额减至2 252 300美 元。

在第2周内， 股票价格降到了47.37美元， 期权的Delta也随之降低

依此类推， 在期权接近到期时，很明显期权将会被行使，期权的Delta接近1.0。

因此在第20周结束时，对冲者会拥有100000只股票，期权持有人会在此时行使期权，对冲者以执行价格卖出股票而收到 500万美元，卖出期权与对冲风险的总费用为263300美元。

2、Gamma

Gamma表示衍生证券的**Delta**变化相对于**标的资产价格**变化的比率。

$$\Gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$$

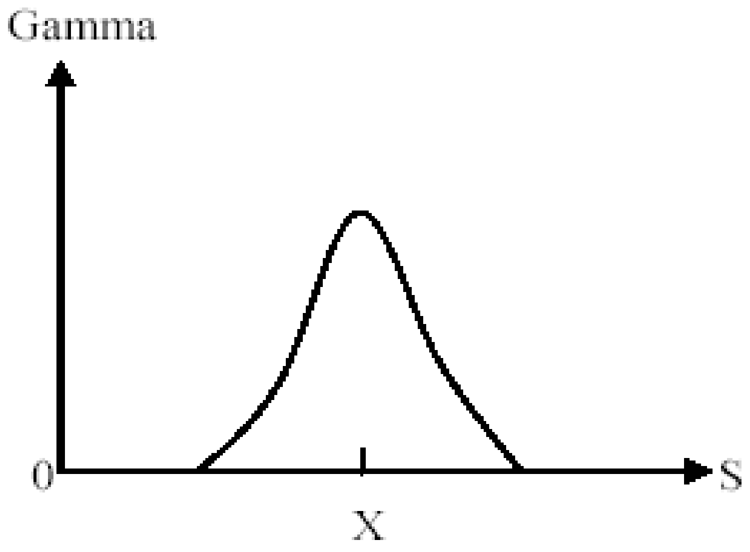
无收益资产看涨期权和欧式看跌期权的Γ值为

$$\Gamma = \frac{e^{-0.5 d_1^2}}{S\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}$$

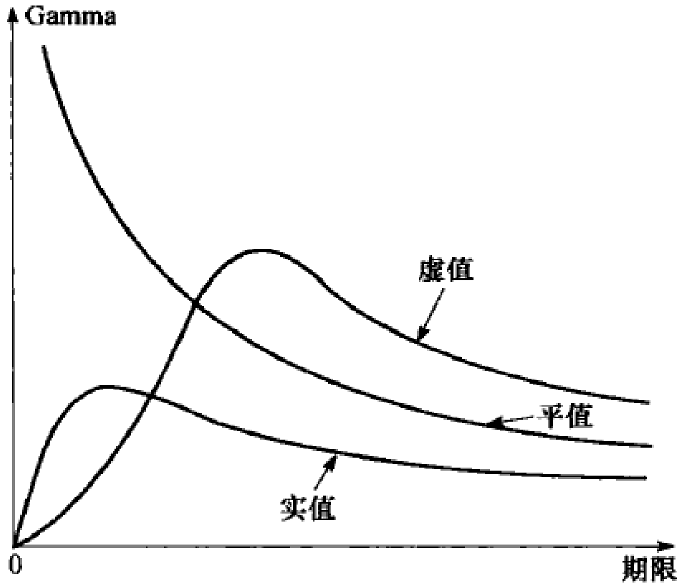
其值总为正

也可以写成

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{(T-t)}}$$



无收益资产看涨期权和欧式看跌期权Gamma值与标的资产价格S的关系图



无收益资产看涨期权和
欧式看跌期权Gamma值与T-t的关系

衍生证券的Gamma用于衡量该证券的Delta值对标的资产价格变化的敏感度，它等于衍生证券价格对标的资产价格的二阶偏导数，也等于衍生证券的Delta对标的资产价格的一阶偏导数。由于看涨期权与看跌期权的Δ之间只相差一个常数，因此两者的值总是相等的。

无收益资产期权的Gamma值总为正值，但它会随着S、（T－t）、r和的变化而变化。

当证券组合中含有标的资产和该标的资产的各种衍生证券时，该证券组合的Gamma值就等于组合内各种衍生证券Gamma值的总和；

证券组合的Gamma值实际上等于该组合内各种期权的数量与其Gamma值乘积的总和。由于期权多头的Gamma值总是正的，而期权空头的Gamma值总是负的，因此若期权多头和空头数量配合适当的话，该组合的Gamma值就等于零。我们称Gamma值为零的证券组合处于Gamma中性状态。

证券组合的Γ值可用于衡量Δ中性保值法的保值误差。这是因为期权的Δ值仅仅衡量标的资产价格S微小变动时期权价格的变动量，而期权价格与标的资产价格的关系曲线是一条曲线，因此当S变动量较大时，用Δ估计出的期权价格的变动量与期权价格的实际变动量就会有偏差。

为了消除Δ中性保值的误差，我们应使保值组合的Γ中性化。为此应不断地根据原保值组合的Γ值，买进或卖出适当数量标的资产的期权，以保持新组合Γ中性，同时调整标的资产或期货合约的头寸，以保证新组合Δ中性。

即，随时间变化，我们要不断调整期权头寸和标的资产或期货头寸，才能保持保值组合处于Γ中性与Δ中性状态。

3、 Theta

Theta表示在其他条件不变时，**衍生证券的价值**变化相对于**时间**变化的比率。

$$\Theta = \frac{\partial f}{\partial t}$$

对于无收益资产的欧式和美式看涨期权而言，

$$\Theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rXe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

根据累积标准正态分布函数的特性

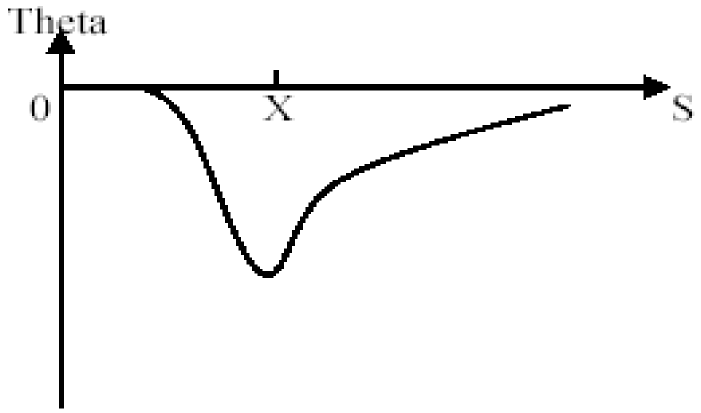
$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.5x^2}$$

因此，

$$\Theta = -\frac{S\sigma e^{0.5d_1^2}}{2\sqrt{2\pi(T-t)}} - rXe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

对于无收益资产的欧式看跌期权而言，

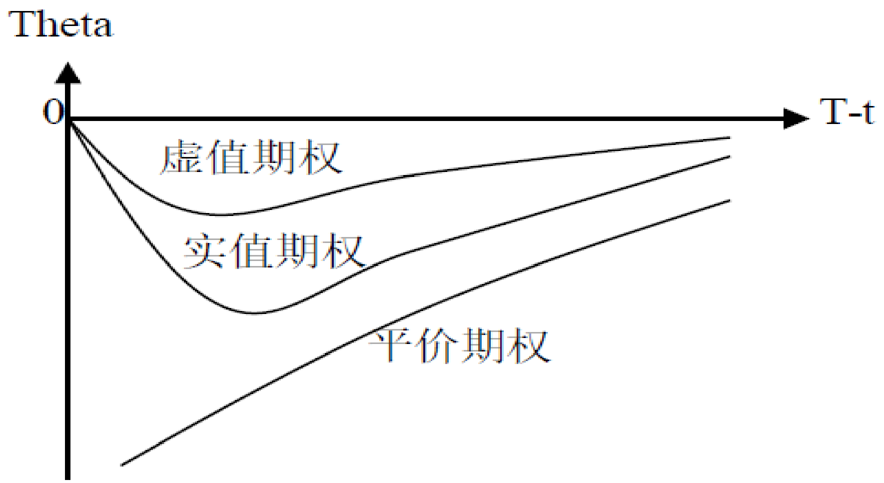
$$\Theta = -\frac{S\sigma e^{0.5d_1^2}}{2\sqrt{2\pi(T-t)}} + rXe^{-r(T-t)}[1-N(d_2)]$$



无收益资产看涨期权Theta值与标的资产价格S的关系图

当越来越临近到期日时，期权的时间价值越来越小，因此期权的Theta几乎总是负的。期权的Theta值同时受S、（T-t）、r和的影响。

无收益资产看涨期权的Theta值与（T－t）的关系跟（S－X）有很大关系



Delta，Theta和Gamma 之间的关系

无收益资产的衍生证券价格f必须满足B—S微分方程，即：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf$$

根据定义：

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\Theta,\frac{\partial f}{\partial S}=\Delta,\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=\Gamma$$

因此有：

$$\Theta+rS\Delta+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma=rf$$

Delta，Theta和Gamma三者之间的符号关系

	Delta	Theta	Gamma
多头看涨期权	+	−	+
多头看跌期权	−	−	+
空头看涨期权	−	+	−
空头看跌期权	+	+	−

4、 Rho

Rho表示**衍生证券组合的价值**变化与**利率**变化之间的比率。

$$rho = \frac{\partial f}{\partial r}$$

无收益资产看涨期权

$$\rho_c = \frac{\partial c}{\partial r} = (T-t)Xe^{-r(T-t)}N(d_2) > 0$$

无收益资产欧式看跌期权

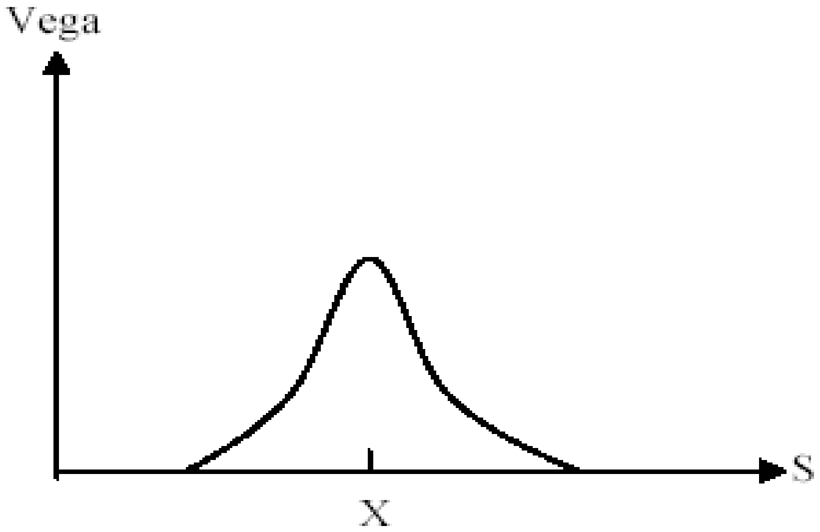
$$\rho_p = \frac{\partial p}{\partial r} = -(T-t)Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) < 0$$

5、 Vega

Vega表示**衍生证券的价值**变化与**标的资产波动率**变化的比率。

$$\Lambda = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

对于无收益资产看涨期权和欧式看跌期权而言 $\Lambda = \dfrac{S\sqrt{T-t}\cdot e^{-0.5d_1^2}}{\sqrt{2\pi}}$



无收益资产看涨期权和看跌期权的Vega值与标的资产价格S的关系图

当我们调整期权头寸使证券组合处于Λ中性状态时，新期权头寸会同时改变证券组合的Γ

因此，若套期保值者要使证券组合同时达到Λ中性、 Γ中性至少要使用同一标的资产的两种期权。

我们令Γ_p和Λ_p分别代表原证券组合的Γ值和Λ值，Γ_1和Γ_2分别代表期权1和期权2的Γ值，Λ_1和Λ_2分别代表期权1和期权2的Λ值，w_1和w_2分别代表为使新组合处于Γ中性和Λ中性需要的期权1和2的数量，则w_1和w_2可用下述联立方程求得：

$$\Gamma_p + \Gamma_1 w_1 + \Gamma_2 w_2 = 0$$

$$\Lambda_p + \Lambda_1 w_1 + \Lambda_2 w_2 = 0$$

需要注意的是加上这两种期权头寸后，新组合达到Λ中性、Γ中性，但Δ会发生变化，这样必须调整标的资产来达到Δ中性状态。

6、期权价格与执行价格的关系

$$\frac{\partial c}{\partial K} = -e^{-rT}N(d_2) \qquad \frac{\partial p}{\partial K} = e^{-rT}N(-d_2)$$

7、其它字母

$$Vomma = \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} = SN'(d_1)\sqrt{t}\frac{d_1 d_2}{\sigma}$$

$$Vanna = \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma} = -N'(d_1)\frac{d_2}{\sigma}$$

$$Charm = \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial t} = -N'(d_1)\frac{2rt - d_2\sigma\sqrt{t}}{2t\sigma\sqrt{(t)}}$$

$$Veta = -\frac{\partial^2 c}{\partial t \partial \sigma} = SN'(d_1)\sqrt{t}\left(\frac{rd_1}{\sigma\sqrt{(t)}} - \frac{1 + d_1 d_2}{2t}\right)$$

注：此处的t，相当于τ。τ=T-t

8、对于有红利率的欧式看涨期权与看跌期权对红利率的关系

期权定价公式 $c = Se^{-q\tau}N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$

$$d_1 = \frac{\ln(Se^{-q\tau}/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(Se^{-q\tau}/K) + (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln(S/K) + (r - q - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

则有（Ψ读psi）

$$psi = \frac{\partial c}{\partial q} = -\tau Se^{-r\tau}N(d_1)$$

$$psi = \frac{\partial p}{\partial q} = \tau Se^{-r\tau}N(-d_1)$$

附：全面风险管理—VaR概念

风险价值（Value at Risk，　简称VaR）或称在险价值

VaR风险度量的出现是由于JP Morgan的前首席执行官Dennis Weatherstone当时想要知道每个交易日结束时银行所面临的风险状况。

他要求他的手下设计一种将只产生一个数字的风险度量可以在每个交易日的下午4:15向他报告，以便对他提供一个银行风险的精确意见。他希望能提供给他的是一种对可能给银行造成困难的坏结果的风险概念。

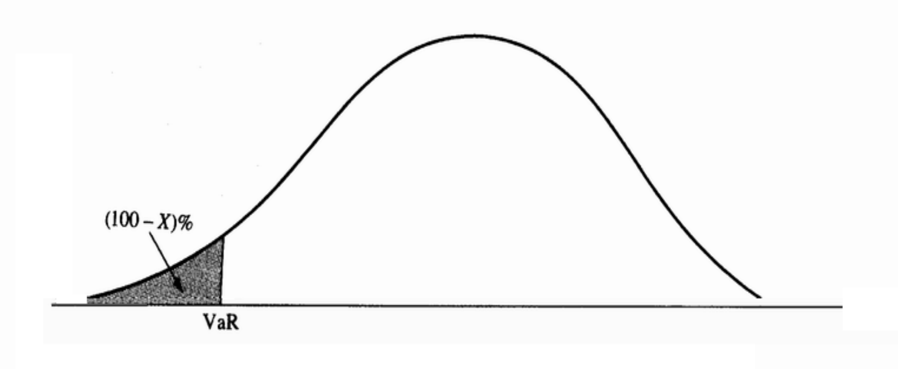
传统的三种风险度量，波动率、系统风险和非系统风险都无法直接回答Dennis Weatherstone希望回答的问题，但VaR可以做到。

在险价值是试图用一个数据来总结评估金融投资组合的总风险的一种尝试。

- 在险价值（VaR）是指在一定概率水平（置信水平）下，某一金融资产或证券组合价值在未来特定时期内的最大可能损失。
- VaR 为金融市场风险管理中的主流方法和主要指标，是市场风险管理中最重要的方法之一。

ΔV 为组合价值的变化

$$\text{Prob}(\Delta V < -\text{VaR}) = 1 - X\%$$



要使用VaR就必须选择定义中的两个参数——时间长度T和置信度

X%。

VaR虽然作为一种风险度量，但它无法帮助机构规避无法承受的损失。VaR只是告诉我们有X%的把握在N日内损失不会超过多少，但它并没有告诉我们 (1 – X)% 的小概率发生时实际损失将会是多少。

处理极端价格变动影响最适当的风险度量方法是一类称为压力测试的方法

不同的压力测试的方法：

极端值理论（Extreme value theory, EVT）

情景分析

历史模拟