第五章期权的定价

1、期权的二叉树定价模型

2、期权的B-S定价模型

第一节期权的二叉树定价模型

二叉树期权定价（Binomial option Pricing Model）由Cox, Ross, Rubinstein等人提出

见：Cox J, Ross S, Rubinstein M. "Option pricing: a simplified approach", Journal of Financial Economics, 1979.7(3), pp.229-263

注：在没有特别说明的情况下，这里的期权是以欧式看涨期权为例

一、 单期二叉树期权定价模型

考虑一个欧式看涨期权，　在当前（t = 0），下期（t = T）到期

假设期权的标的股票是一个服从二项分布的随机变量。

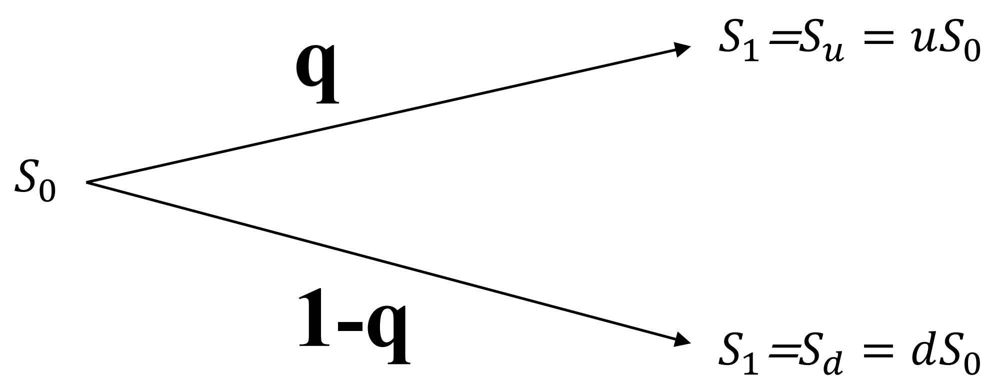
当前为s_0，到期为s_1，这样就有

$$S_1 = S_u = uS_0 > S_0, u > 1; \qquad S_1 = S_d = dS_0 < S_0, d < 1$$

$$\Pr ob(S_1 = S_u) = q, \qquad \Pr ob(S_1 = S_d) = 1 - q$$

其中，u为上涨因子，d为下跌因子，

q为股票价格上涨的概率，（1-q）为股票价格下跌的概率



问题： 如何确定期权在期初的价值c_0？即如何为期权定价？

因为我们知道在t=T 时， $c_1 = (S_1 - K)^+$ ， 其中K为期权的执行价格

如果股票上涨 $c_1 \triangleq c_u = (S_u - K)^+$

如果股票下跌 $c_1 \triangleq c_d = (S_d - K)^+$

设想1：复制策略

设想1：构造如下投资组合，在股票市场上持有Δ股标的资产的股票（即股票多头），无风险债券空头（资金B、无风险利率为r）

目的：在到期日t=T时刻，无论股票价格上涨还是下跌，上述投资组合的价值都与欧式看涨期权的价值相等。即通过构造的投资组合合成一份欧式看涨期权。

根据无套利原理，两价值在t=T时刻相等，则在 t=0时刻，两价值亦相等。

设想2：对冲策略

设想2：构造如下组合：Δ股股票多头，一份欧式看涨期权空头，使该组合成为无风险的组合。

目的：达到套期保值的目的

设想1的实现

期初t=0时刻，投资组合的价值为 $V_0 = \Delta S_0 - B$

期末t=T时刻，组合的价值 v_1 与欧式看涨期权的价值完全相等

股票价格上涨时： $V_u = \Delta S_u - Be^{rT} = c_u$

股票价格下跌时： $V_d = \Delta S_d - Be^{rT} = c_d$

由上两式得到

$$\Delta = (c_u - c_d)/(S_u - S_d) = (c_u - c_d)/[(u-d)S_0]$$

$$B = (S_d c_u - S_u c_d)/[(S_u - S_d)e^{rT}]$$

$$= (dc_u - uc_d)/[(u-d)e^{rT}]$$

根据无套利原则

$$c_0 = \Delta S_0 - B$$

$$= (c_u - c_d)/(u-d) - (dc_u - uc_d)/[(u-d)e^{r\tau}]$$

$$= e^{-rT}[\frac{e^{rT}-d}{u-d}c_u + \frac{u-e^{rT}}{u-d}c_d]$$

$$= e^{-rT}[pc_u + (1-p)c_d]$$

这里

$$p = \frac{e^{rT}-d}{u-d}$$

设想2的实现

在期初t=0时，构造Δ股股票多头，一份欧式看涨期权期权空头，使该组合成为无风险的组合则该组合的价值为 $V_0 = \Delta S_0 - c_0$

在期末t=T时， $V_1 = \Delta S_1 - c_1$

由于该组合是无风险组合，无论股票价格上升还是下跌都有 $V_1 = e^{rT} V_0$

若股票价格上升，$S_1 = S_u$

$$V_1 = \Delta S_u - c_u = V_0 e^{rT}$$

若股票价格下跌，$S_1 = S_d$

$$V_1 = \Delta S_d - c_d = V_0 e^{r\tau}$$

解得

$$\Delta = (c_u - c_d)/(S_u - S_d) = (c_u - c_d)/[(u-d)S_0]$$

于是，将Δ带入上式中的任何一个可得（如第一个等式）

$$c_0 = \Delta S_0 - e^{-rT}(\Delta S_u - c_u)$$

$$= \frac{c_u - c_d}{u-d} - e^{-rT}\left(\frac{c_u - c_d}{u-d}u - c_u\right)$$

$$= e^{-rT}\left[\frac{e^{rT} - d}{u-d}c_u + \frac{u - e^{rT}}{u-d}c_d\right]$$

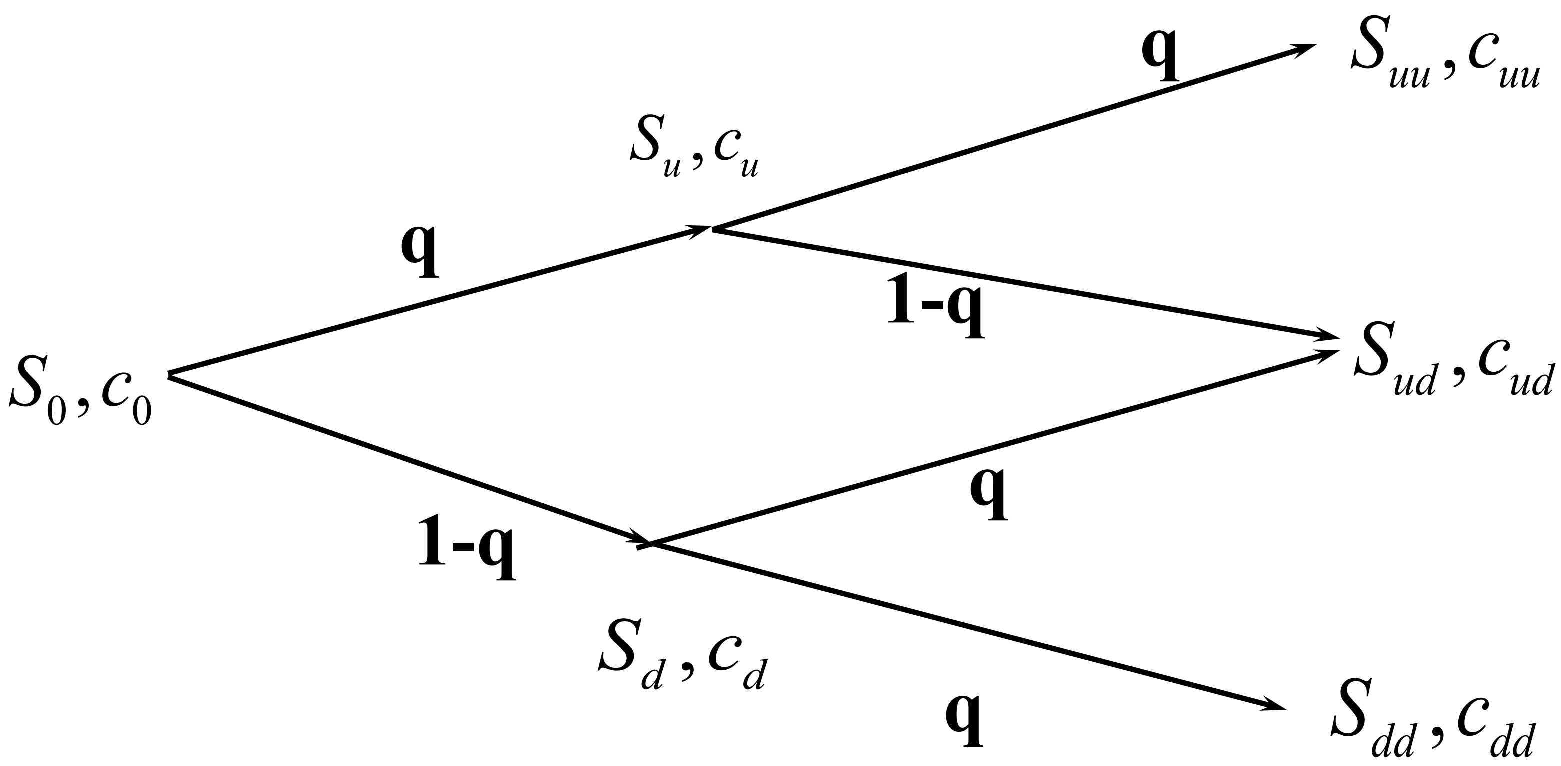
$$= e^{-rT}[pc_u + (1-p)c_d]$$

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u-d}$$

二、多期二叉树期权定价模型

- 由于标的资产市场价格是一个连续（接近连续）的随机变量，不可能只有两种情形。
- 两期：若把从定价日至到期日的时间划分为两个阶段，在每一个阶段，仍然假设标的资产价格只可能取两种状态，上涨和下跌，且上涨和下跌的幅度不变，则第二阶段结束时候，标的资产价格的取值为3个
- n期：同样保持两期相类似的过程，若将定价日到到期日的时间分为n个阶段，则标的资产在到期日的状态可能取值为n＋1个

1、两期模型



这里需要说明的是： 由于上涨与下跌的幅度保持不变，则有 $S_{ud} = S_{du}$ ，

从而合并后只有三种状态结果

从而，

$$c_{uu}=\max(0,S_{uu}-K)=\max(0,u^2S_0-K)$$

$$c_{ud}=c_{du}=\max(0,S_{ud}-K)=\max(0,udS_0-K)$$

$$c_{dd}=\max(0,S_{dd}-K)=\max(0,d^2S_0-K)$$

利用单期定价公式，设T为单位时间

$$c_u = [pc_{uu} + (1-p)c_{ud}]e^{-rT}$$

$$c_d = [pc_{ud} + (1-p)c_{dd}]e^{-rT}, p = \frac{e^{rT} - d}{u-d}$$

$$c_0 = [pc_u + (1-p)c_d]e^{-rT}$$

$$= [p^2 c_{uu} + 2p(1-p)c_{ud} + (1-p)^2 c_{dd}]e^{-2rT}$$

$$
\begin{aligned}
c_0 &= [p^2 c_{uu} + 2p(1-p)c_{ud} + (1-p)^2 c_{dd}]e^{-2rT} \\
&= [p^2 \max(0, u^2 S_0 - K) \\
&\qquad + 2p(1-p)\max(0, udS_0 - K) \\
&\qquad + (1-p)^2 \max(0, d^2 S_0 - K)]e^{-2rT}
\end{aligned}
$$

定价思路：倒推定价法

2、二叉树定价模型的一般形式

- 二期模型可以推广到n期的场合。
- 标的股票当前价格为S_0，而在以后任意一期，股价的变化有两个可能，且上升、下跌幅度保持不变。这样经过n期后，到期日股价为S_n为

$$S_n = S_0 u^j d^{n-j}, j = 0,1,\ldots,n$$

即上涨j次，下跌n－j次。

由概率论可知，S_n服从二项分布，即S_n的概率为

$$C_n^j p^j (1-p)^{n-j}$$

按照二期模型的推导思路，从最后的n期开始逐期向前推导，则

$$c_0 = e^{-rnT}\{\sum_{j=0}^{n}[C_n^j p^j (1-p)^{n-j} \max(0, S_0 u^j d^{n-j} - K)]\}$$

三、二叉树定价中u和d的确定

1、选取u和d 使二叉树与波动率吻合

2、在Cox, Ross, Rubinstein的文章中，增加了一个条件

$$ud = 1$$

3、当二叉树的步长为Δt 时，为了与波动率吻合

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad ; \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad ; \quad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

四、美式期权的二叉树定价

- 美式期权可以提前执行，提前执行从表面上看是一个非常微小的变化，但是欧式期权与美式期权（尤其是看跌期权）价值有很大的不同。
- 值得注意的是，美式期权要在树型结构的每一个结点上，需比较在当前节点执行期权获得的收益与使用上一节点结果计算的当前节点的期权价值，选择其中较大者作为本节点的期权价值。
- 美式期权没有解析解，故采用二叉树方法来逼近。

- 注：美式看涨期权与欧式看涨期权相同

定价的过程是从树的末尾出发以倒推的形式推算到树的起始点，在树的每一个节点上，需要检验提前行使期权是否为最优。

在树的最后节点上， 期权的价格等于欧式期权的价格。

之前任何一个节点上期权的价格等于以下两个数 量的最大值：

(l)由公式所计算的值

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d]$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

(2)提前行使期权的收益

例：考虑一个两年期执行价格为52美元的美式看跌期权， 股票的当前价格为50美元。假定股票价格服从步长为1年的两步二叉树。 在二叉树的每一步上，股票价格或者上涨20%, 或者下跌20%, 无风险利率为5%。

解：1、计算最后节点的股票价格、相应的期权价值与概率p

u=1.2, d=0. 8, Δt= 1及r=0. 05。 由公式，得出风险中性概率p为

$$p = \frac{e^{0.05\times1} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.6282$$

最终的股票价格可能为72美元、48美元或32美元。

这时， 相应节点的期权价值为0, 4, 20

2、计算节点B、C的期权价值

节点B

（1）按照如下公式计算　得期权值为1.4147

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d]$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

（2）提前执行相应的收益为K-S=52-60=-8元

为此节点B的期权价值取为1.4147

节点C

按照结算节点B的方法

（1）按照公式计算的结果为9.4636

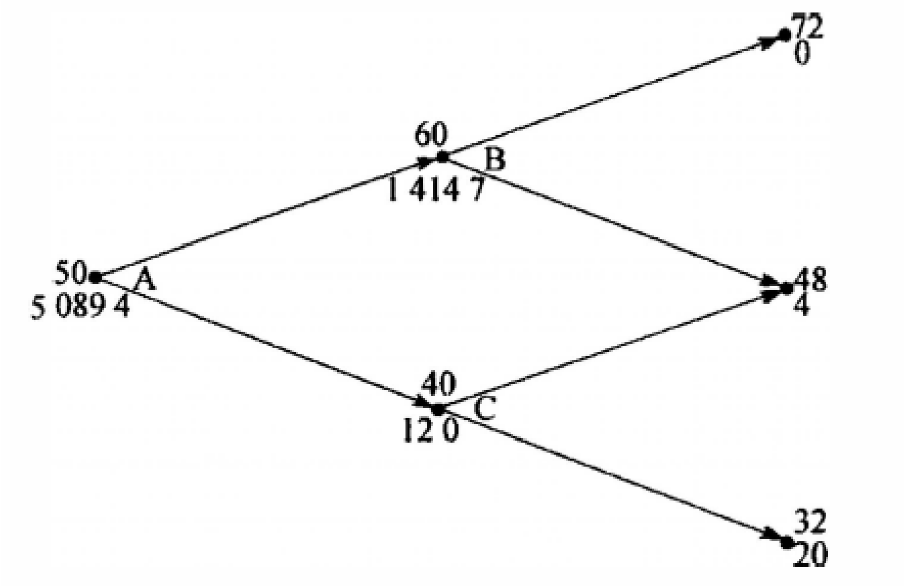
（2）提前执行的收益为K-S=52-40=12

为此，节点C的期权价值取为12

3、节点A的期权价值确定

$$e^{-0.05\times 1}(0.6282\times 1.4147+0.3718\times 12)=5.0894$$

二叉树方法计算美式看跌期权各节点示意图



例：美式看跌期权的计算

- 假设标的资产为不付红利股票,其当前市场价为50元,波动率为每年40%，无风险连续复利年利率为10%，该股票5个月期的美式看跌期权协议价格为50元，求该期权的价值。
- 利用倒退定价法，可以推算出初始结点处的期权价值为4.48元。

南開大學 Nankai University

- 为了构造二叉树，我们把期权有效期分为五段，每段一个月（等于0.0833年）。可以算出：

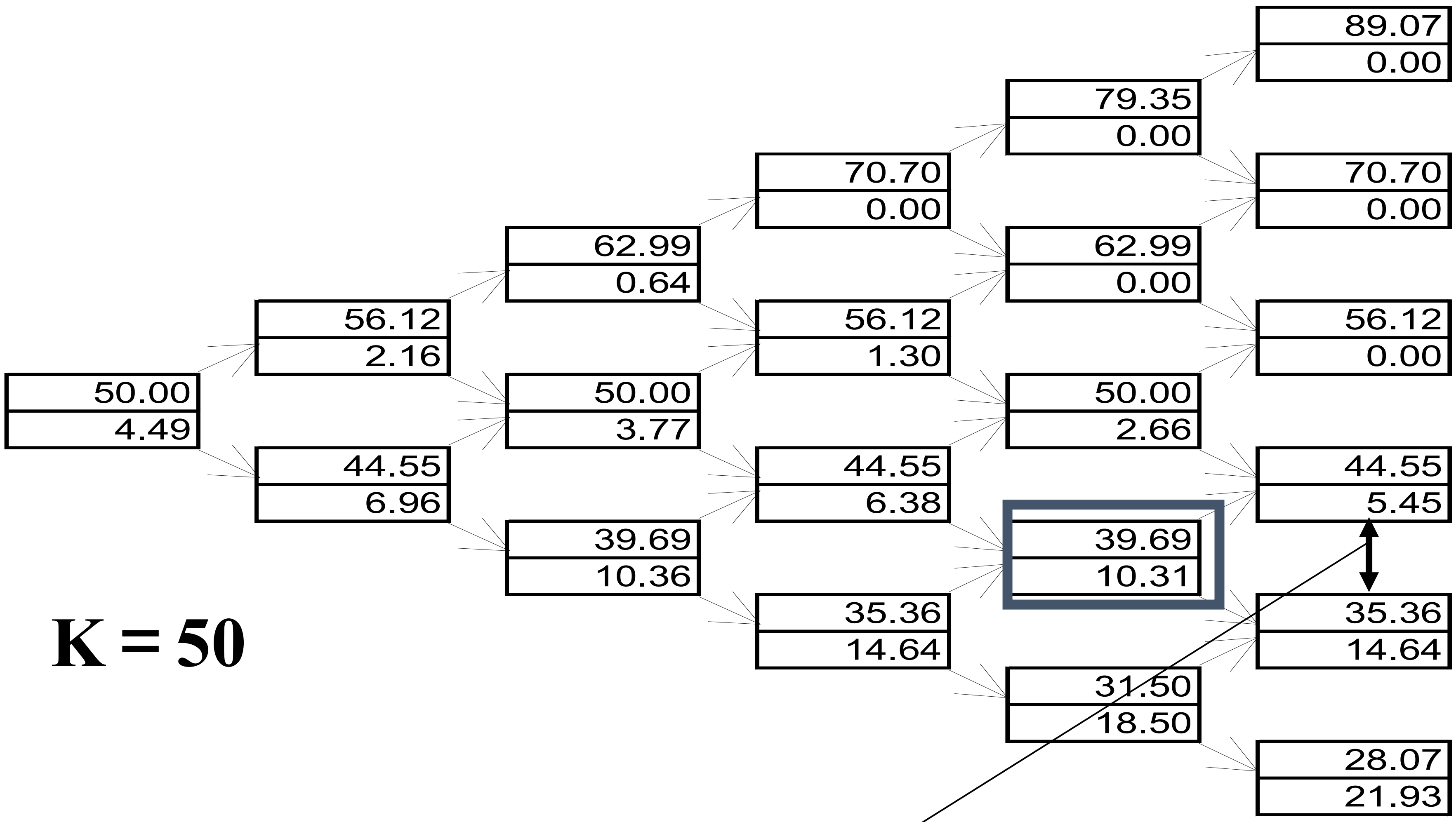
$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.1224$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.8909$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = 0.5076$$

$$1 - p = 0.4924$$

美式看跌期权二叉树



K = 50

$$(0.5076 \times 5.45 + 0.4924 \times 14.64)e^{-0.1 \times 0.0833} = 9.90$$

附：风险中性的理解

风险中性概率p。考虑离散的场合，定义总收益率

$$R = e^{r\tau} = 1 + r_m$$

若定义

$$R^u = \frac{S^u}{S^0} - 1 = u - 1, R^d = \frac{S^d}{S^0} - 1 = d - 1$$

$$p = \frac{e^{r\tau} - d}{u - d} = \frac{R - d}{u - d}$$

则

$$pR^u + (1 - p)R^d = \frac{R - d}{u - d}R^u + (1 - \frac{R - d}{u - d})R^d = R - 1 = r_m$$

- 上式表明，以p计算的标的股票投资回报率的期望值等于无风险利率。
- 同时，按照p计算的看涨期权的投资回报率的期望值也等于无风险利率。

$$[pc^{u}+(1-p)c^{d}]/c_{0}-1=e^{-r\tau}-1=r_{m}$$

所以，p是使得风险性的股票投资和买权投资的期望回报等于无风险利率的概率，因此，称为风险中性概率（risk neutral probability）

例：某无股息股票的价格为78美元， 波动率为30%, 所有期限的无风险 利率均为每年3% (连续复利）。

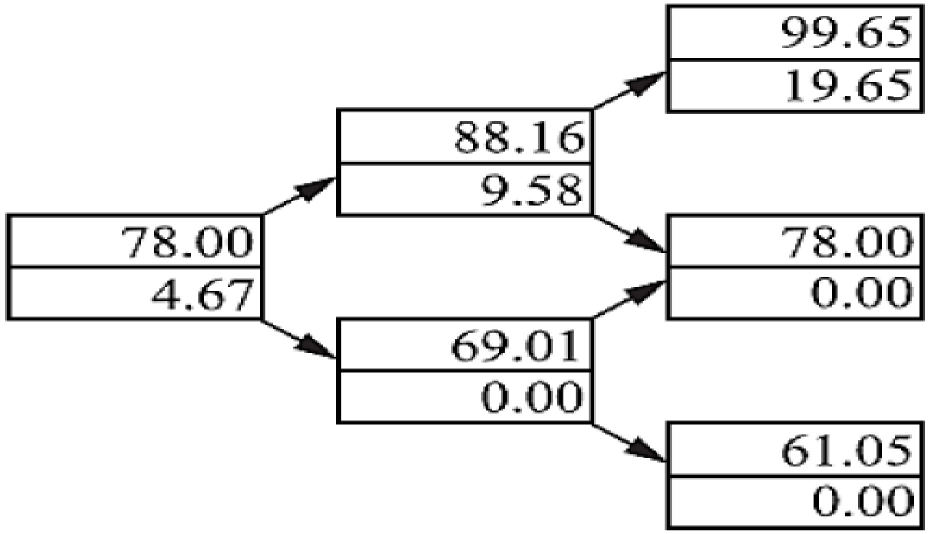
1、采用2个月的步长， 计算参数 u, d和p。

2、采用两步二叉树， 即步长为2个月、 4个月期限、 执行价格为80美元 的欧式看涨期权的价值为多少?

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{30\% \times \sqrt{2/12}} \approx 1.1303$$

$d = 1/u \approx 0.8847$

$p = (e^{r\Delta t} - d) / (u - d) = (e^{3\% \times 2/12} - 0.8847) / (1.1303 - 0.8847) \approx 0.4898$



作业9

某股票价格为 90 美元， 利用三步二叉树计算期权价格： (a) 9 个月期限、 执行价格为 93 美元的 美式看涨期权； (b) 9 个月期限、执行价格为 93 美元的美式看跌期权。波动率为 28%, 无风险利率（所有期限） 为 3% (连续复利）。

即Δt=三个月=0.25年