三、利率远期与利率期货

1、连续复利（连续利率）

2、即期利率与远期利率

3、远期利率协议

4、利率期货

5、基于久期的套期保值

南開大學
Nankai University

- 利率远期与利率期货
  - 远期利率
  - 远期合约
    - 远期利率协议
  - 期货合约
    - 短期利率期货
      - 短期国债期货
      - 欧洲美元期货
    - 中长期国债期货
  - 基于久期的套期保值策略

（一）连续复利

假设将金额为1的资金投资 n 年。如果利率 r 按年复利，那么投资的终值为

$$a(n) = (1+r)^n$$

如果利率是 1 年复利 m 次，投资终值为

$$a(n) = (1+\frac{r}{m})^{mn}$$

连续复利终值公式

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} = e^{rn}$$

r称为连续利率

（二）即期利率与远期利率

1、即期利率

➢**即期利率**（spot rate）又称为零息利率（zero rate）

指一笔在中间无任何利息支付，到期后才偿付本金与利息的投资利率

➢n年零息利率：也称为n年期的即期利率，或者n年期的零息利率

如5年期的连续复利零息利率为5%，则5年后，100美元会增长到

$$100 \times e^{0.05\times 5} = 128.40\text{美元}$$

2、即期利率的确定

采用息票剥离法

相关数据如表（参见《期权、期货及其他衍生产品》）

表 4-3　票息剥离法数据

债券本金（美元）	期限（年）	年票息（美元）①	债券价格（美元）
100	0.25	0	97.5
100	0.50	0	94.9
100	1.00	0	90.0
100	1.50	8	96.0
100	2.00	12	101.6

①票息每半年支付一次。

（1）第一行：3个月的连续复利的即期利率为R，则R满足

$$100 = 97.5e^{R\times 0.25}$$

解得 $R=$ 10.127%

（2）第二行：6个月的连续复利的即期利率为R，则R满足

$$100 = 94.9e^{R\times 0.5}$$

解得 $R=$ 10.469%

（3）第三行：1年的连续复利的即期利率为R，则R满足

$$100 = 90e^{R\times 1.0}$$

解得 $R=$ 10.536%

（4）第四行：1.5年的连续复利的即期利率为R

第 4 个债券的期限为 1.5 年，票息和本金支付如下：

6 个月时：4 美元

1 年时：4 美元

1.5 年时：104 美元

由前面的计算，对于在 6 个月后支付的利息应采用贴现率 10.469%，对于在 1 年后支付的利息应采用贴现率 10.536%。我们知道债券价格为 96 美元，它必须等于债券持有人所有收入现值的总和。假定在 1.5 年所对应的零息利率为 R，那么

$$4e^{-0.104\,69\times0.5}+4e^{-0.105\,36\times1.0}+104e^{-R\times1.5}=96$$

以上方程可被简化为

$$e^{-R\times1.5}=0.851\,96$$

即

$$R=-\frac{\ln(0.851\,96)}{1.5}=0.106\,81$$

即1.5年的连续复利的即期利率R=10.681%

（5）第五行：2年的连续复利的即期利率为R

2 年期的零息利率也可以通过类似的方法由 6 个月、1 年以及 1.5 年的零息利率来求得：

假定 R 为两年期的零息利率，我们有

$$6e^{-0.10469\times0.5}+6e^{-0.10536\times1.0}+6e^{-0.10681\times1.5}+106e^{-R\times2.0}=101.6(\text{美元})$$

由此得出 $R=0.10808$，即 10.808%。

对于非整周期的即期利率的计算，一般采用线性差值方法，这里不再介绍

3、远期利率

远期利率是指现在时刻的将来一定期限的利率

如1 x 4远期利率，即表示1个月之后开始的期限3个月的远期利率

远期利率是由一系列即期利率决定的，是由当前即期利率隐含的未来一定期限的利率

4、远期利率的确定

如果现在时刻为t，T时刻到期的即期利率为r，T^*时刻到期的即期利率为 r^*，则 T时刻的T^*-T期间的远期利率$\hat{r}$可通过下式求得：

$$(1+r)^{T-t}\left(1+\hat{r}\right)^{T^*-T}=\left(1+r^*\right)^{T^*-t}$$

为更精确地给出即期利率和远期利率之间的关系，我们采用连续复利

当即期利率和远期利率所用的利率均为连续复利时，即期利率和远期利率的关系可表示为：

$$\hat{r} = \frac{r^*(T^* - t) - r(T - t)}{T^* - T}$$

这是因为

$$e^{r(T-t)} \times e^{\hat{r}(T^*-T)} = e^{r^*(T^*-t)}$$

所以

$$r(T-t) + \hat{r}(T^* - T) = r^*(T^* - t)$$

例如，当一年期和两年期的连续复利年利率分别为10%和10.5%时，一年到两年的连续复利远期年利率等于11%，因为

$$e^{0.10} \times e^{0.11} = e^{0.105\times 2}$$

对远期利率公式 $$\hat{r}=\frac{r^{*}\left(T^{*}-t\right)-r(T-t)}{T^{*}-T}$$

进一步改写，可得

$$\hat{r}=r^{*}+(r^{*}-r)\frac{T}{T^{*}-T}$$

如果我们将不同时刻到期的即期利率绘成曲线，那么若曲线在 T 与 T^{*} 之间呈上升趋势，即 $r^{*}>r$，则 $\hat{r}>r^{*}$，即在 T^{*} 结束的时间段上，远期利率大于期限为 T^{*} 的即期利率。

远期利率套利操作图

	$r_F(T^*-T)>r^*(T^*-t)-r(T-t)$	$r_F(T^*-T)<r^*(T^*-t)-r(T-t)$
t 时刻	(1) 一次性以 r^* 借入到期日为 T^* 的贷款 A 元 (2) 将 A 以 r 贷出至 T 时刻 (3) 签订一份期限为 T^*-T、远期利率为 r_F 的 FRA，贷出金额为 $A\times e^{r(T-t)}$	(1) 以 r 借入到期日为 T 的贷款 A 元 (2) 签订一份期限为 T^*-T 的 FRA，约定在 T 时刻以 r_F 借入 $A\times e^{r(T-t)}$ 元至 T^* 时刻 (3) 将借入的 A 元以 r^* 贷出至 T^* 时刻
T 时刻	(1) 收到贷款本息 $A\times e^{r(T-t)}$ (2) 执行 FRA 将 $A\times e^{r(T-t)}$ 按 r_F 贷出	(1) 从 FRA 中按 r_F 借入 $A\times e^{r(T-t)}$ (2) 正好还掉第一笔借款
T^* 时刻	(1) 从 FRA 贷款中收回 $A\times e^{r(T-t)}\times e^{r_F(T^*-T)}$ (2) 还掉长期贷款 $A\times e^{r^*(T^*-t)}$，获得无风险收益	(1) 收回长期贷款 $A\times e^{r^*(T^*-t)}$ (2) 还掉 FRA 借款本息 $A\times e^{r(T-t)}\times e^{r_F(T^*-T)}$，获得无风险收益
结果	r 与 r_F 趋于下降，r^* 趋于上升	r 与 r_F 趋于上升，r^* 趋于下降
结果	$r_F(T^*-T)=r^*(T^*-t)-r(T-t)$	

作业四

假设现在6个月即期年利率为10%（连续复利，下同），

1年期即期利率为12%，

6个月到1年的远期利率为11%，

问应如何进行套利？

（三）远期利率协议

- 远期利率协议（Forward rate agreement，FRA）是一种远期合约，**是买卖双方同意从未来某一商定的时期开始在某一特定时期内按协议利率借贷一笔数额确定、以具体货币表示的名义本金的协议。**
- **远期利率协议的买方或称名义借款人**

  其订立远期利率协议的目的主要是为了规避利率上升的风险。

  如果市场利率上升的话，他按协议上确定的利率支付利息，可以避免利率风险
- **远期利率协议的卖方或称名义贷款人**

  其订立远期利率协议的目的主要是为了规避利率下降的风险。

  他按照协议确定的利率收取利息，若市场利率下跌，他将受益
- 之所以称为“名义”，是因为借贷双方不必交换本金，只是在结算日根据协议利率和参考利率之间的差额以及名义本金额，由交易一方付给另一方结算金。

➢远期利率协议价值的确定

设远期利率协议的名义本金为A

现在时刻为t，T 时刻到期的即期利率为r， T^* 时刻到期的即期利率为 r^*,

T 时刻的 T^*-T 期间的远期利率为$\hat{r}$

未来T时刻开始期限为（ T^*-T）的远期利率协议中约定的合同利率为r_K

于是，远期利率协议多方（即借入名义本金的一方）的现金流为

T时刻：A

T*时刻：$-Ae^{r_K(T^*-T)}$

这些现金流的现值即为远期利率协议多头的价值

为此，我们要先将T* 时刻的现金流用T* -T期限的远期利率贴现到T

时刻，再贴现到现在时刻t，即

$$f = Ae^{-r(T-t)} - Ae^{r_K(T^*-T)} \times e^{-\hat{r}(T^*-T)} \times e^{-r(T-t)}$$

$$= Ae^{-r(T-t)} \times \left[1 - e^{(r_K - \hat{r})(T^*-T)}\right]$$

这里的远期价格就是合同利率。

根据远期价格的定义，远期利率就是使远期合约价值为0的协议

价格（在这里为r_K）

$$r_F = \hat{r}$$

而我们知道

$$\hat{r} = \frac{r^*(T^* - t) - r(T - t)}{T^* - T}$$

因此，理论上的远期利率（r_F）应等于：

$$r_F = \frac{r^*(T^* - t) - r(T - t)}{T^* - T}$$

例：假设2年期即期年利率（连续复利，下同）为10.5%，3年期即期年利率为11%，本金为100万美元的2年 x 3年远期利率协议的合同利率为11%，问该远期利率协议的价值和理论上的合同利率等于多少?

根据公式，该合约理论上的合同利率为：

$$r_F = \hat{r} = \frac{0\cdot 11\times 3 - 0\cdot 105\times 2}{3-2} = 12\cdot 0\%$$

该合约价值为：

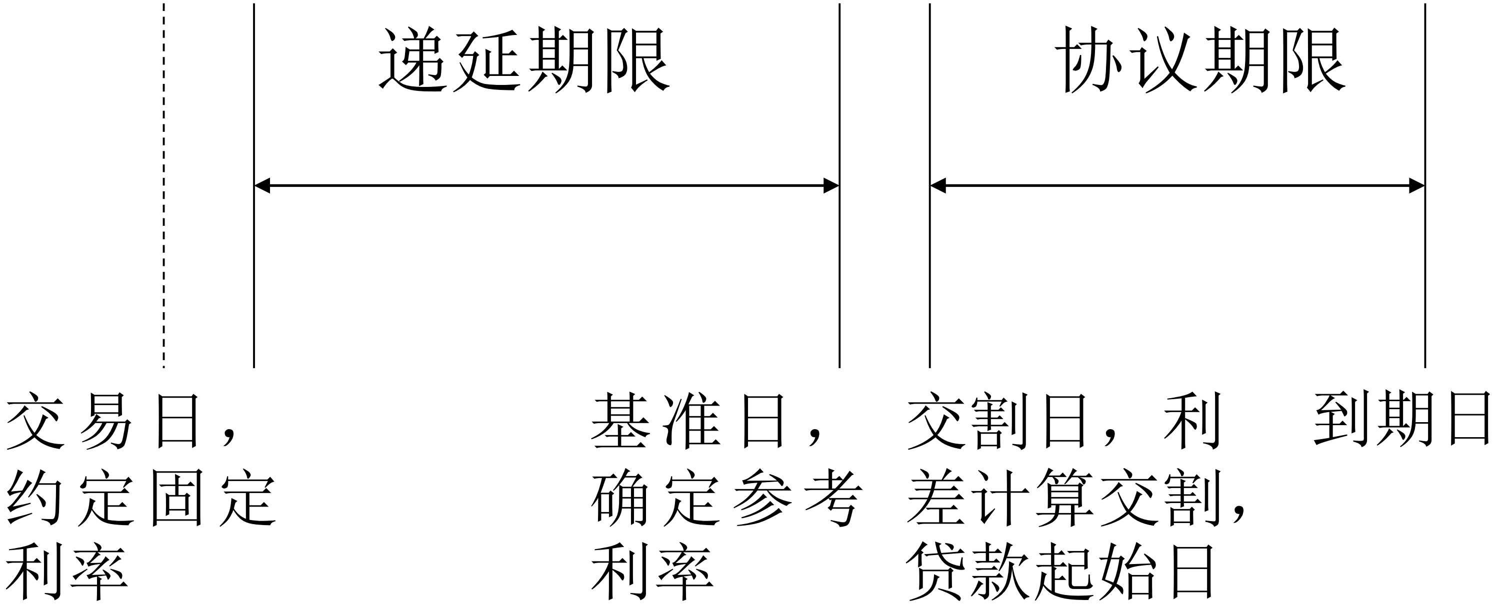
$$f = 100\text{万}\times e^{-0\cdot 105\times 2}\times[1-e^{(0\cdot 11-0\cdot 12)(3-2)}] = 8065\cdot 31\text{美元}$$

远期利率协议的要素与交割（略）

远期利率协议包括以下协议要素

- 买方名义上在未来特定期限向卖方借款
- 卖方名义上在未来特定期限向买方贷款
- 确定特定数额的本金
- 本金的币种确定
- 确定的借贷利率
- 确定的借贷期限
- 未来交易的基准日

远期利率协议主要时间点示意图



在交割日，如果在基准日确定的参考利率高于协议利率，则远期利率协议的买方可以得到浮动利率与固定利率之间的差价；反之，如果在基准日确定的参考利率低于协议利率，则远期利率协议的买方必须向对方支付在基准日确定的参考利率与固定利率之间的差价。双方交割金额的计算公式为

$$L=\frac{(i_r-i_c)\times A\times(T-t)}{1+i_r\times(T-t)}\text{万}$$

（四）利率期货

1、利率期货及其分类

- 利率期货是指以利率敏感证券作为标的资产的期货合约。它可以用来规避市场利率变动的风险
- 按照合约标的的期限，利率期货可分为短期利率期货、长期利率期货
- 短期利率期货是指期货合约标的的期限在一年以内的各种利率期货，即以货币市场的各类债务凭证为标的的利率期货均属于短期利率期货
- 长期利率期货则是指期货合约标的的期限在一年以上的各种利率期货，即以资本市场的各类债务凭证为标的的利率期货均属于长期利率期货，包括各种期限的中长期国债期货和市政公债指数期货等

- 长期利率期货的代表品种：美国长期国库券期货
  10年期美国中期国库券期货
- 短期利率期货的代表品种：3个月期的美国短期国库券期货
  3个月期的欧洲美元定期存款期货

- 1972年5月16日，美国芝加哥商品交易所(CME)的国际货币市场（IMM）成立，并首次开始经营货币期货
- 1982年9月，伦敦成立国际金融期货交易所(LIFFE)，也开始进行外汇的期货交易
- 目前全世界已有多个国家和地区进行外汇和其他金融期货交易，其中IMM和LIFFE的交易规模最大

阅读：中国的327国债期货

1、327国债

327国债事件是指上海证券交易所发行代号为327的国债期货合约在1995年2月23日发生的集中、大规模的违规交易事件。1995年2月23日，财政部发布公告称，“327”国债将按148.50元兑付，空头判断彻底错误。管金生为了维护自身利益，在收盘前八分钟时，大举透支卖出国债期货，做空国债。晚上十点，上交所紧急宣布：1995年2月23日16时22分13秒之后的所有交易是异常的无效的。因此万国证券亏损56亿人民币，濒临破产。

英国金融时报将这一天称为“中国大陆证券史上最黑暗的一天”。

2、2013年9月6日重启

2、短期利率期货合约

(1) 美国短期国库券期货

标的资产	3个月期美国国库券，面值1,000,000美元
交割月份	每年的三月、六月、九月、十二月
合约报价	100减去贴现率
最小价格浮动幅度	1bp，（$25）
最后交易日	合约月份的第一交割日前的营业日
交割日	对应的现货月份的第1天
交易时间	07:20-14:00，最后交易日的上午10：00收盘

➢美国短期国库券是一种贴现债券，是以**贴现率**来报价的

假设短期国库券的价格为P（贴现数额），国债面值100美元，则其报价为

$$(360/n)\times(100-P)$$

● 例如3个月国债，其现金价格为98，则其报价为：（360/90）×(100-98) = 8。

即此国债的贴现率为8%；而其收益率为[（100-98）/98]×(360/90)=8.16%

● **期货合约报价为100减去相应的短期美国国库券的报价**

对应于贴现率为8%的3个月国债，

期货报价为100 – 8 = 92，

而短期国库券期货标的物的市场价格为98

（2）欧洲美元定期存款期货

①欧洲美元

欧洲美元是存放于美国本土之外的美国银行或外国银行的美元。

欧洲美元利率是银行之间存放欧洲美元的利率，这一利率与伦敦银行同业拆借利率(LIBOR) 基本上一致

3个月期限的欧洲美元期货是在美国市场里CME集团交易的最流行的利率期货

交易单位	3月期欧洲美元定期存款，面值1,000,000美元
交割月份	每年的三月、六月、九月、十二月及现货月份
合约报价	100.00 减去收益率
最小价格浮动幅度	1bp，（$25）
最后交易日	合约月份的第三个星期三之前的第二个伦敦营业日
交割日	最后交易日
交易时间	07:20-14:00，最后交易日07:20-9:30

②欧洲美元期货报价

- IMM 指数（或报价）： $Q = 100 \times (1 - 3个月期欧洲美元利率)$

  该利率为1年以360天计的1年计4次复利的年利率

- **期货合约价格：** $10,000 \times (100 - 0.25 \times (100 - Q))$

- 规避利率上升风险：卖出欧洲美元期货
- 规避利率下跌风险：买入欧洲美元期货

虽然欧洲美元期货的报价方式与美国短期国库券期货的报价方式相同，但国库券期货的价格是100减去贴现率，而欧洲美元期货的价格是100减去收益率。贴现率和收益率是不等价的，两者之间不具有可比性。在比较两者的报价时，需要对贴现率和收益率进行换算，两者的换算公式为：

$$\text{收益率} = \frac{\text{贴现额}}{\text{贴现价格}} \times \frac{360}{90} = \frac{\text{贴现率} \times 90/360}{1 - \text{贴现率} \times 90/360} \times \frac{360}{90}$$

3、中长期国债期货

- 中长期国债期货是指以中期（期限1到10年）和长期（期限10年以上）的国债作为标的资产的期货合约。
- 美国市场上最流行的长期利率期货合约之一是CME 集团交易的长期国债利率期货。在该合约里，从交割月份的第1 天算起，任何期限介于15 年与25 年之间的债券均可以用于交割。
  自2010 年开始， CME 集团引入超级国债期货，任何期限超过25 年的国债均可以用于交割。

- 2013年9月6日，5年期国债期货合约在中国金融期货交易所正式开始交易

美国长期国债期货为例

①美国长期国债现货和期货的报价

②转换因子

③交割最便宜的债券

④确定期货价格

其结论也适用于中期国债期货

1）长期国债现货和期货的报价

- 长期国债期货的报价与现货报价一样，以美元和32分之一美元报出，所报价格是100美元面值债券的价格，如90-25，是指 $90\frac{25}{32}$
- 由于合约规模为面值10万美元

  90-25的报价意味着面值10万美元的报价是90,781.25美元

报价与现金价格

报价也称净价

现金价格也称带息价格

报价与购买者所支付的现金价格不同，现金价格与报价的关系为：

现金价格=报价+从上一个付息日以来的累计利息

例： 假设现在时间是2018 年3 月5 日，所考虑的债券息票率为11%，到期日为2038 年7 月10 日，

报价为155 -16，即155.50 美元。

- 因为债券的券息每半年支付一次(最后一个券息支付日期为债券的到期日)。最近的前一次付息日为2018 年1 月10 日，下一个付息日为2018 年7 月10 日。

  在2018 年1 月10 日与2018 年3 月5 日之间(实际天数)总共有54 天，而在2018 年1 月10 日与2018 年7 月10 日之间(实际天数)总共有181 天
- 一个面值为100 美元的债券在1 月10 日和7 月10 日所支付的券息为5.50 美元。2018 年3 月5 日的
- 累计利息是在7 月10 日所支付的息票被累积到2018 年3 月5 日时的数量。

  因为美国国债累计利息是基于“实际天数/实际天数”（注），因此累计利息为

$$\frac{54}{181}\text{x}5.50=1.64$$

- 100 美元面值债券的现金价格为 155.50 + 1. 64 = 157. 14(美元)

  对应100000 美元面值债券的现金价格为157,140 美元

注：天数计算与计息方式

- 天数计算定义了在一段时间内利息累计的方式

一般来讲，我们知道在一段参考区间内的利息(例如，介于息票支付时间间隔内的利息)，但是我们希望知道对于某个其他时间期限内的利息累计方式。

- 一般惯例是将天数计算表达成X/Y 的形式。当我们计算两个日期之间的利息时， X 定义了两个日期之间计算天数的方式， Y 定义了参考期限内总天数的计算方式。
- 在两个日期之间的利息为

(两个日期之间的天数/参考期限的总天数) x 参考期限内所得利息

- 在美国有3 种流行的天数计量惯例

(1)实际天数/实际天数(一段时间内)

(2) 30/360

(3) 实际天数/360

- 美国长期国债采用"实际天数/实际天数(一段时间内) 的天数计算惯例

Nankai University 南開大學

2）交割券与标准券的转换因子

- 长期国债期货允许合约的空头方可以选择任何期限介于15年和25年之间的债券。当交割某一债券时，一个叫作转换因子（Conversion Factor）的参数定义了空头方所收取的价格
- 由于期限长于15年且在15年内不可赎回的任何国债均可用于交割而各种债券息票率不同，期限也不同，因此交易所会规定交割的“标准券”
- 例如：“标准券”为期限15年、息票率为8%的国债（其票息每半年计复利一次），其它券种均按一定的比例折算成“标准券”。这个比例称为转换因子

转换因子等于面值为100美元的各债券的现金流按8%的年利率（每半年计复利一次）贴现到交割月第一天（注）的价值，再扣掉该债券累计利息后的余额

注：因为中长期期国债期货的空头可选择在交割月任意一天交割。

- 在计算转换因子时，债券的剩余期限只取3个月的整数倍，多余的月份舍掉。如果取整数后，债券的剩余期限为6个月的倍数，就假定下一次付息是在6个月之后，否则就假定在3个月后付息，并从贴现值中扣掉累计利息，以免重复计算。
- 转换因子由交易所计算并公布
- 此时每交割100美元面值的债券所收入的现金价格为

现金价格=(最新的期货成交价格×转换因子) +累计利息

或

空方交割100美元面值的债券应收到的现金为

空方收到的现金=最新的期货报价×交割债券的转换因子+交割债券的累计利息

➢**转换因子：**用来换算不同票面利率和不同到期日的可交割国债的比价关系，具有以下几个方面的特征

（1）每种可交割国债和每个可交割月份下的转换因子都是唯一的，在交割周期里是保持不变的

（2）可交割债券票面利率越高，转换因子就越大；票面利率越小，转换因子就越小

（3）可交割债券票面利率高于名义标的债券票面利率时，转换因子大于1，并且剩余期限越长，转换因子越大；而可交割债券票面利率低于名义标的债券票面利率时，转换因子小于1，并且剩余期限越长，转换因子越小

（4）可交割债券票面利率高于名义标的债券票面利率时，近月合约对应的转换因子高于远月合约对应的转换因子；可交割债券票面利率低于名义标准券票面利率时，近月合约对应的转换因子低于远月合约对应的转换因子

例：每一份合约对应于交割100,000美元面值的债券。假定最新的成交价格为90-00，交割债券的转换因子为1.3800 ，并且在交割时面值为100美元的债券的累计利息为3美元。因此，期货空头方交割债券时，对于每100美元面值的债券，收到的现金数量为(由期货多头方支付）：

$$(90.00 \times 1.3800) + 3 = 127.20(\text{美元})$$

期货空头方应交割的债券面值为100000美元，因此收到现金为127200美元

例1：某长期国债息票利率为14%，剩余期限还有18年4个月。标准券期货的报价为90-00，求空方用该债券交割应收到的现金。

注：期货报价均指标准券的期货报价

计算转换因子。根据规则，假定该债券距到期日还有18年3个月。这样我们可以把将来息票和本金支付的所有现金流先贴现到距今3个月后的时点上，此时债券的价值为：

$$\sum_{i=0}^{36}\frac{7}{1\cdot 04^{i}}+\frac{100}{1\cdot 04^{36}}=163\cdot 73\text{美元}$$

由于转换因子等于该债券的现值减累计利息。因此我们还要把163.73美元贴现到现在的价值。由于3个月的利率等于 $\sqrt{1.04}-1$ ，即1.9804%，因此该债券现在的价值为

163.73/1.019804=160.55美元

由于3个月累计利息等于3.5美元，因此转换因子为：

转换因子=（160.55-3.5）/100=1.5705

空方交割10万美元面值该债券应收到的现金

1000×［（1.5705×90.00）+3.5]=144,845美元

例2：假定债券的券息率为每年10% ，期限为20年零2个月，计算转换因子。

假设“标准券”为期限15年、息票率为6%的国债（其票息每半年计复利一次）

解：按照相关规则，假定债券期限为正好20年，在6个月后第一次付息，然后每6个月支付一次券息，直到20年后支付本金为止。假定面值为100美元。当贴现率为每年6%(每半年复利一次），即每6个月为3%时，债券价值为

$$\sum_{i=1}^{40}\frac{5}{1\cdot 03^{i}}+\frac{100}{1\cdot 03^{40}}=146\cdot 23\text{美元}$$

以上价值除以100 后得出转换因子为1.4623

3） 确定交割最便宜的债券（CTD Bond）（cheapest- to- deliver bond）

由于转换因子制度固有的缺陷和市场定价的差异决定了用何种国债交割对于双方而言是有差别的，而空方可选择用于交割的国债多达30种左右，因此空方应选择最便宜的国债用于交割

- 交割最便宜的债券就是购买交割券的成本与空方收到的现金之差最小的那个债券

交割差距=债券报价+累计利息 - [(期货报价x转换因子)+累计利息]

=债券报价 -（期货报价x转换因子）

这是因为

空头方收到的现金价格为

(最新的期货成交价格x 转换因子) +累计利息

买入债券的费用为

债券报价+累计利息

因此最便宜交割债券是使得　　债券报价- (最新的期货成交价格x 转换因子)

达到最小的债券

一旦期货的空头方决定交割债券，最便宜交割的债券可以通过考虑每个可交割债券来确定

例：假设可供空头选择用于交割的三种国债的报价和转换因子如表所示，而期货报价为93-16，即93.50美元。试确定最便宜的交割债券。

可供交割国债报价及其转换因子

国　债	报　价	转 换 因 子
1	144.50	1.5186
2	120.00	1.2614
3	99.80	1.0380

根据以上数据，求出各种国债的交割差距为：

国债1：　　　144.50-(93.50 x 1.5186)=2.5109

国债2：　　　120.00-(93.50 x 1.2614)=2.0591

国债3：　　　 99.80-(93.50 x 1.0380)=2.7470

因此，交割最便宜的国债是国债2

4）国债期货价格的确定

由于国债期货的空方拥有交割时间选择权和交割券种选择权，因此要精确地计算国债期货的理论价格也是较困难的。

但是，如果我们假定交割最便宜的国债和交割日期是已知的，那么可以通过以下四个步骤来确定国债期货价格。

1. 根据交割最便宜的国债的报价，运用公式算出该交割券的现金价格

现金价格=报价+从上一个付息日以来的累计利息

2. 运用公式，根据交割券的现金价格算出交割券期货理论上的现金价格

$$F=(S-I)e^{r(T-t)}$$

3. 运用公式，根据交割券期货的现金价格算出交割券期货的理论报价

现金价格=报价+从上一个付息日以来的累计利息

4. 将交割券期货的理论报价除以转换因子即为标准券期货理论报价，也是标准券期货理论的现金价格

注：中长期国债期货的价格等于一个为持有人提供支付已知现金收益资产的期货合约，其公式为 $F=(S-I)e^{r(T-t)}$

例：假定对于某一国债期货已知最便宜可交割债券的票息率为12%，
转换因子为1.6000 。债券的当前报价为115美元。
假定已知期货交割日期为270天后，每半年一次支付一次票息。如图所示

上一次票息支付为60天前，下一次票息支付为122天后，再下一次票息支付为305 天后。
利率期限结构为水平，无风险利率均为每年10%（连续复利）。

根据上述条件求国债期货的理论价格。

1、债券的现金价格等于报价+从上一次付息到今天的累计利息，

债券现金价格为

$$115+\frac{60}{60+122}\times 6=116.978\text{美元}$$

2、计算期货有效期内交割券支付利息的现值

由于期货有效期内只有一次付息，是在122天（0.3342年）后支付6美元的利息，因此票息的现值为：

$$6e^{-0.1\times 0.3342}=5.803\text{美元}$$

3、由于该期货合约的有效期还有270天（即0.7397年）运用公式计算交割券期货理论上的现金价格为：

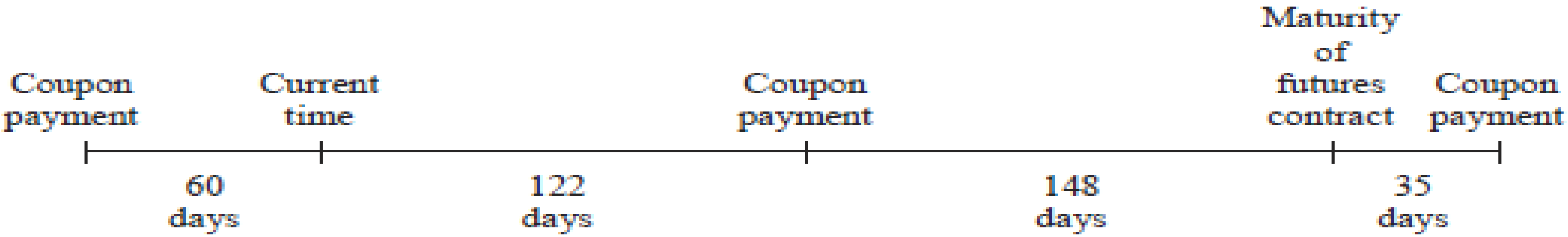
$$(116.978-5.803)\times e^{0.1\times 0.7397}=119.711\text{美元}$$

4、由于交割时，交割券还有148天（即270-122天）的累计利息，而该次付息期总天数为183天（即305天-122天），运用公式，求出交割券期货的理论报价为：

$$119\cdot 711-6\times\frac{148}{148+35}=114\cdot 859\text{美元}$$

5、由转换因子，求出标准券的期货报价：

$$\frac{114 \cdot 859}{1 \cdot 6000} = 71 \cdot 79$$



阅读：中国金融期货交易所5年期固定利率国债期货合约

中国金融期货交易所5年期固定利率国债期货合约

项目	中国国债期货交易合约
合约标的	面额为100万元人民币，票面利率为3%的5年期名义标准国债
报价方式	百元报价
最小变动价位	0.01个点（每张合约最小变动100元）
合约月份	最近的三个季月（三、六、九、十二季月循环）
交易时间	上午：9:15—11:30下午：13:00—15:15 最后交易日：9:15—11:30
最大波动限制	上一交易日结算价的±2%
最低交易保证金	合约价值的3%
当日结算价	最后一小时成交价格按成交量加权平均价
最后交易日	合约到期月份的第二个星期五
交割方式	实物交割
交割日期	最后交易日后连续三个工作日
可交割债券	剩余期限4—7年（不含7年）的固定利息国债
交割结算价	最后交易日全天成交量加权平均价
合约代码	TF

转换因子的计算公式

$$CF=\frac{1}{\left(1+r/f\right)^{xf/12}}\left[\frac{c}{f}+\frac{c}{r}\left(1-\frac{1}{\left(1+r/f\right)^{n-1}}\right)+\frac{1}{\left(1+r/f\right)^{n-1}}\right]-\frac{c}{f}\times\frac{12-xf}{12}$$

其中，

r表示国债期货标准合约利率，目前定为3%

x表示交割月距离下一个付息月的月份数（当交割月是付息月时，x=6或12，取决于交割券是一年付2次还是1次息）

n表示剩余付息次数

c表示可交割券的票面利率

f表示可交割券每年的付息次数

计算结果四舍五入至小数点后4位。

中金所规定计算转换因子时取整数月份

（五）基于久期的套期保值

1、债券的久期

2、债券组合的久期

3、凸性

4、基于久期的期货对冲策略

1、债券的久期(duration)

（1）离散情景下债券债券定价与久期

离散情景下债券定价公式

$$P=\sum_{i=1}^{m}\frac{C}{(1+y)^{i}}+\frac{A}{(1+y)^{m}}$$

离散情景下债券的久期（Duration）或称麦考利久期以及修正久期（Modified Duration）

$$\frac{dP}{dy}\times\frac{1}{P}=\frac{-1}{1+y}\times\left[\frac{1C}{1+y}+\frac{2C}{(1+y)^2}+\cdots+\frac{mC}{(1+y)^m}+\frac{mA}{(1+y)^m}\right]\times\frac{1}{P}$$

$$=\frac{-1}{1+y}\times 麦考利久期$$

$$麦考利久期=\left[\frac{1C}{1+y}+\frac{2C}{(1+y)^2}+\cdots+\frac{mC}{(1+y)^m}+\frac{mA}{(1+y)^m}\right]\times\frac{1}{P}$$

$$修正久期=\frac{1}{1+y}\times 麦考利久期$$

(2）连续复利下债券定价公式下的久期

- 债券的连续复利定价公式

$$P=\sum_{i=1}^{m} C_i e^{-y(t_i-t)}$$

- 连续复利下债券久期:

$$D=-\frac{dP}{dy}\frac{1}{P}=\frac{\sum_{i=1}^{m} c_i\times e^{-y\times(t_i-t)}\times(t_i-t)}{P}$$

- 注：1、在使用连续复利到期收益率时，普通债券的久期就是现金流的加权平均期限，无需再调整

  2、为了定义久期，所有贴现均采用债券收益率y

（3）公式的近似（连续复利下）

当收益率y有微小变化时，以下公式近似成立

$$\frac{dP}{dy} \approx \frac{\Delta P}{\Delta y}$$

进一步可得

$$\Delta P \approx -DP\Delta y$$

或

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D\Delta y$$

2、债券组合的久期

债券组合的久期D可以被定义为构成债券组合中每一个债券久期的加权平均，其权重与相应债券价格成正比。以上所得的公式仍然适用，其中P为债券组合的价值。

同样上述公式可以用来估计当所有债券收益率都有一个微小变化Δy 时对证券组合价值的影响

注：当将久期的概念用于债券组合时，隐含假设了所有债券的收益率变化都大致相同

3、久期的局限性

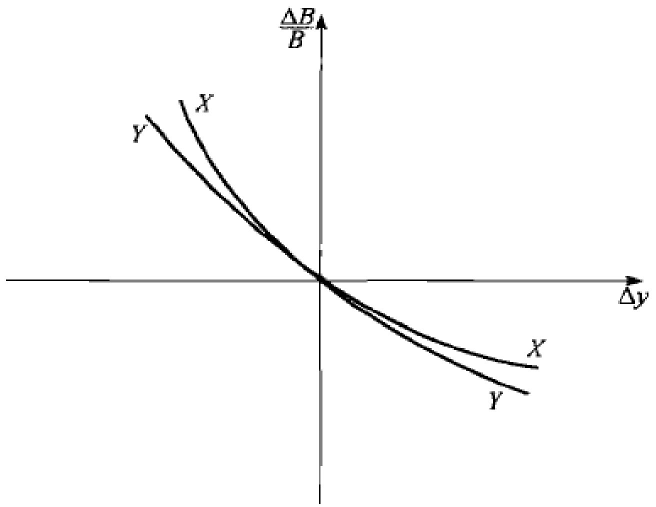
久期有着天然的局限性

- 久期仅仅是资产价格对利率的一阶敏感性，无法反映和管理资产价格的全部利率风险，当利率变化较大时这个缺陷尤其显著；
- 久期的定义建立在利率曲线发生平移，即所有期限的利率变化幅度相等的假设基础之上，这是一个不符合现实的假设。

Nankai University

4、凸性

- 久期仅适用于当收益率变化很小的情形
- 右图显示了两个具有相同久期的组合价值百分比变化与收益率变化之间的不同形式
- 这两条曲线在原点的斜率相同，这意味着当收益率的变化很小时，两个组合价值变化的百分比相同



- 但当收益率变化较大时，两个组合价值变化不同
- 一种叫作凸性(convexity) 的变量可以用来衡量曲线的弯曲程度，它可以用来改善近似的精确性

凸性的公式

- 凸性公式 $$C = \frac{1}{P}\frac{d^2P}{dy^2}$$

- 利用泰勒阶数展开，我们可以得到一个比久期近似公式更精确的表达

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D\Delta y + \frac{1}{2}C(\Delta y)^2$$

5、基于久期的期货对冲策略

假定我们持有一个与利率有关的资产组合(例如，债券组合或货币市场证券)。我们现在考虑如何利用利率期货来对这个资产组合进行对冲。

定义

- V_F :1份利率期货合约的价格
- D_F:期货合约标的资产在期货合约到期日的久期值
- P:被对冲的债券组合在对冲到期日的远期价值

(在实际中，通常假定该价值等于债券组合的当前价值)

- D_P： 被对冲的证券组合在对冲到期日时的久期值

如果我们假定对应于所有期限，收益率的变动均为 Δy ，即利率曲线的变动为平行移动，那么以下方程近似成立

$$\Delta P = -PD_P\Delta y$$

$$\Delta V_F = -V_F D_F \Delta y$$

因此用于对冲收益率变动 Δy 所需的合约数量为

$$N = \frac{D_P \times P}{D_F \times V_F}$$

利用这一关系式可以使整体证券头寸的久期变为0

- 当采用国债期货进行对冲时，对冲者必须在假设某一特定债券将被交割的前提下计算D_F。

　　这意味着对冲者在实施对冲时，必须首先估计哪个债券可能是最便宜可交割债券。

　　如果利率环境发生了变化，以至于其他债券变为了最便宜可交割债券，对冲者必须将对冲头寸进行调整，因此对冲效果也许会比预期的要差。

- 当利用利率期货进行对冲时，对冲者应注意利率与期货价格向相反方向变动

　　当利率上升时，利率期货价格下降；当利率下降时，利率期货价格上升

因此，在利率下降时会承受损失的公司应进入期货的多头。类似地，在利率上升时会承受损失的公司应进入期货的空头。

- 对冲人应选择期货合约使标的资产的久期尽量接近于被对冲资产的久期。欧洲美元期货常常被用于短期利率头寸对冲，而超级国债、长期国债和中期国债期货常常被用于对长期利率头寸的对冲。

例： 假定今天是8 月2 日。一位负责管理价值为1000 万美元的政府债券组合的基金经理担心在今后3 个月内利率会剧烈变化，并决定利用12 月份的国债期货来对冲债券组合的价格变动。

12 月份国债期货的报价为93-02，或93.0625 。由于美元合约要交割面值为10万美元的国债，因此合约的价值为93062.50 美元。

假设证券组合在3 个月后的久期为6.80 年。国债中最便宜可交割债券预计为20 年期、票息率为12% 的债券。该债券当前收益率为每年8.80%，在期货到期时，其久期为9.20 年。

解析：基金经理需要进入国债期货的空头来对冲其证券组合的价格变动：

如果利率上升，期货空头会带来收益，同时债券组合会产生损失

如果利率下降，期货空头会带来损失，但债券组合会产生收益

于是：

基金经理需要卖出债券期货头寸的数量为

$$N = \frac{D_P \times P}{D_F \times V_F} = \frac{6.80 \times 10000000}{9.20 \times 93062.50} = 79.42$$

取整后，基金经理需要卖出79 份合约

附：国债期货价格久期

基于交割券期货现金价格的久期（假设*dy=dr*）

$$F = (S - I)e^{r(T-t)}$$

$$\frac{dF}{dr} = e^{r(T-t)}\left(\frac{dS}{dr} - \frac{dI}{dr}\right) + (S - I)e^{r(T-t)}(T - t)$$

$$\approx -(S - I)e^{r(T-t)}D_s + (S - I)e^{r(T-t)}(T - t)$$

$$D_F = -\frac{dF / F}{dr} \approx D_s - (T - t)$$

如果I为常数， 则 $\frac{dI}{dr} = 0$ ，

进一步得到 $D_F \approx D_S$

即期货价格的久期与期货合约中标的资产价格的久期近似相等

国债期货报价的久期

$$D_G = -\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{1}{\frac{F-\text{应计利息}}{\text{转换因子}}} \times \frac{1}{\text{转换因子}} \times \frac{\partial F}{\partial r}$$

$$= \frac{1}{F-\text{应计利息}} \times D_F \times F \approx D_F$$

此公式是说明交割券与标准券之间的久期关系

附：基于久期的利率套期保值问题

- 由于利率敏感性资产价格与利率存在非线性关系，无法进行静态套保，只能进行动态套保
- 最优的利率风险套期保值比率 n 是使得套期保值组合的价值变动对利率的敏感性为零的套期保值比率

$$\frac{d\Pi}{dy}=0$$

以现货多头和期货空头的空头套期保值组合为例

$$\Pi = P - NV_F$$

$$d\Pi = dP - NdV_F$$

而 $\frac{dV_F}{V_F} = \frac{dF}{F}$ （一般F是按照面值100计算的， 而 V_F 是按照100000计算的 ）

经过近似，可得期货合约数

$$N = \frac{dP/dy}{dV_F/dy} = \frac{D_P \times P}{D_F \times V_F}$$