第三节 远期与期货定价

本节主要讲授

- 无套利定价原理
- 远期价值
- 远期价格
- 期货价格

一、一些名词、符号与基本假设

（一）一些名词

1、交割价格（ Delivery Price ）
2、远期价值：远期合约本身的价值
3、远期价格（ Forward Price ）：使得远期价值为零的合理交割价格
4、期货价格（ Futures Price ）
5、卖空（ Short Selling ）
出售不拥有的资产
向其他投资者借入该资产并卖出
未来需买回归还
此期间需支付原持有者应获得的股利等收入

（二）主要符号

T：远期和期货合约的到期时刻（单位为年）。

t：当前时刻，单位为年。T-t 代表远期和期货合约中以年为单位的距离到期的剩余时间。

S：远期（期货）标的资产在时间t 时的价格。

S_T：远期（期货）标的资产在时间T 时的价格（在t 时刻此为未知变量）。

K：远期合约中的交割价格。

f：远期合约多头在t 时刻的价值，即t 时刻的远期价值。

F：t 时刻的理论远期价格和理论期货价格.

r：T 时刻到期的以连续复利计算的t 时刻的无风险利率（年利率）。

假设将金额为1的资金投资 n 年。如果利率 r 按年复利，那么投资的终值为

$$a(n)=(1+r)^n$$

如果利率是 1 年复利 m 次，投资终值为

$$a(n)=(1+\frac{r}{m})^{mn}$$

连续复利终值公式

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}=e^{rn}$$

r称为连续利率

（三）基本假设

- 市场无套利

当套利机会出现时，市场参与者将参与套利活动，从而使套利机会消失，我们得到的理论价格就是无套利机会下的均衡价格

- 没有违约风险
- 没有交易费用和税收
- 允许卖空
- 市场参与者能以相同的无风险利率借入和贷出资金
- 期货合约的保证金账户支付同样的无风险利率。这意味着任何人均可不花成本地取得远期和期货的多头和空头头寸

（四）远期价格与期货价格的关系

当无风险利率恒定且对所有到期日都相同时，其他条件相同的远期价格和期货价格相等。

John C.Cox　Jonathan E.Ingersoll, Jr.　Stephen A.Ross: The Relation Between Forward Prices and Futures Prices, Journal of Financial Economics 9(1981) 321-346

当利率变化无法预测时，两者略有不同

当标的资产价格与利率呈很强的正相关关系时，期货价格高于远期价格

当标的资产价格与利率呈很强的负相关关系时，远期价格高于期货价格

（五）投资资产与消费资产

➢**投资资产**（Investment Assets）：主要持有者以投资为目的，可能部分持有者以消费为目的

➢**消费资产**（Consumption Assets）：主要持有者以消费为目的

在考虑远期合约与期货合约时，区分投资资产和消费资产是很重要的。

投资资产是投资者为了投资目的而持有的资 产。股票与证券显然是投资资产，黄金和白银也属于投资资产。

注意投资资产并不是只能用来投资(例如，白银也有一些工业用途)。但是，投资资产的一个条 件是有足够多的投资者持有它的唯一目的就是为了投资。

而持有消费资产的目的主要是为了消费而不是为了投资。消费资产的例子包括铜、原油和猪肉。

对于投资资产，我们可以从**无套利假设**出发由即期价格与其他市场变量得出远期和期货价格，但对于消费资产我们做不到这一点。

二、无套利定价原理

1、自融资策略

2、套利机会

3、无套利定价的一些定理和推论

4、无套利方法的应用

考虑由 n 个证券构成的金融市场，

S_t^i： 表示 t 时刻证券 i 的价格，一般要求$S_t^i \geq 0$，或$S_t^i > 0$

Φ_t^i： 表示 t 时刻投资在证券 i 的份额

记 $S_t = (S_t^1, \cdots, S_t^n)$ 为**价格向量**； $\Phi_t = (\Phi_t^1, \cdots, \Phi_t^n)$ 为**投资策略**

称$V_t(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_t^i S_t^i = \Phi_t S_t$ 为 t 时刻的**财富过程**。

定义 1： 对于$[0,T]$内，每一整段$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$，交易策略$\Phi$被称为**自融资（self-financing）**的，如果它都满足

$$\Phi_{t_m} S_{t_m} = \Phi_{t_{m-1}} S_{t_m}$$

定理 1： 交易策略Φ是自融资的当且仅当对于$\forall t_u \in (0,T]$都有

$$V_{t_u}(\Phi) = V_0(\Phi) + \sum_{m=1}^{u-1} \Phi_{t_m} (S_{t_{m+1}} - S_{t_m})$$

定理 2：交易策略Φ与交易策略Ψ是两个自融资策略，则$\Phi + \Psi$也是自融资策略。

定义 2： 一个自融资交易策略 Φ 称为在 $[0,T]$ 内存在**套利机会**，如果存在

$T^* \in (0,T]$，

使得当

$$V_0(\Phi)= ($$

有 $V_{T^*}(\Phi) \geq 0$，且 $P\{V_{T^*}(\Phi) > 0\} > 0$

如果对于自融资策略 Φ，对于任意 $[t_m, t_{m+1}] \subset [0,T]$ 都不存在套利机会，则称在 $[0,T]$ 内**无套利**。

定理 3：若市场在$\left[0,T\right]$内无套利，对于任意两个自融资策略Φ_1、Φ_2，如果

$V_T(\Phi_1) \geq V_T(\Phi_2)$且$P\{V_T(\Phi_1) > V_T(\Phi_2)\} > 0$成立

则对于$\forall t \in [0,T)$，都有$V_t(\Phi_1) > V_t(\Phi_2)$

推论：若市场在$\left[0,T\right]$内无套利，对于两个自融资策略Φ_1、Φ_2，如果

$V_T(\Phi_1) = V_T(\Phi_2)$

则对于$\forall t \in [0,T)$，都有$V_t(\Phi_1) = V_t(\Phi_2)$

平

例：欧式看涨看跌期权的评价关系公式

假设股票不支付股息，看涨期权与看跌期权具有相同的执行价格 K 与期限 T 。

平

则有如下**欧式看涨看跌期权的评价关系公式**

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0$$

构造方法：

组合 A：一个欧式看涨期权加上在时间 T 收益为 K 的无风险债券。

组合 B：一个欧式看跌期权加上 1 个股票。

组合 A 与组合 B 在 T 时刻的价值

		$S_T > K$	$S_T < K$
组合 A	看涨期权	$S_T - K$	0
	零息债券	K	K
	总和	S_T	K
组合 B	看跌期权	0	$K - S_T$
	股票	S_T	S_T
	总和	S_T	K

思考题：在$\left[0,T_1\right]$内， 价格向量表示为$S_t=(1,S_t^2,\cdots,S_t^n)$

它有套利机会当且仅当存在自融资策略Ψ，存在$T\in\left[0,T_1\right]$使得

$$V_T(\Psi)\geq V_0(\Psi)\text{；}\quad P\{V_T(\Psi)>V_0(\Psi)\}>0$$

三、远期价值、远期（期货）价格

1、远期价值是远期合约价值的简称，指远期合约本身的理论价值。

2、在签订远期合约时，合约双方所选择的交割价格应使合约的价值在签署合约时等于零。（交割价格应定为签约时的理论价格）

随着时间的推移，标的的市场价格会发生变化，导致了远期的理论价格（使远期合约价值为零的远期价格）发生改变，而原有合约的交割价格（远期的实际价格）则不可能改变，因此原有合约的价值就不再为零。

注：在没有特别说明时，我们的定价等均指投资资产

（一）无收益资产的远期价值、远期（期货）价格

1、无收益资产的远期价值

无收益资产是指在远期到期前不产生现金流的资产。

（或称无中间收入资产；而后面的支付已知现金收益、支付已知收益率资产的两种情况称为有中间收入资产）

构建组合：

组合A： 一份远期合约多头加上一笔数额为 $Ke^{-r(T-t)}$ 的现金（无风险投资）

组合B： 一单位标的资产

远期合约到期时，两种组合都等于一单位标的资产，因此现值必须相等。

$$f + Ke^{-r(T-t)} = S$$

$$f = S - Ke^{-r(T-t)}$$

2、远期（期货）价格（现货-远期平价定理）

远期（期货）价格：

F 就是使合约价值f 为零的交割价格K 。

$$F = Se^{r(T-t)}$$

无收益资产的现货-远期平价定理：对于无收益资产而言，远期价格等于其标的资产现货价格的无风险终值。

思想：构建两种投资组合，

使其终值相等，则其现值一定相等。

如果终值相等的两种组合现值不相等，则存在套利机会。套利者可以卖出现值较高的投资组合，买入现值较低的投资组合，并持有到期末，赚取无风险收益。众多套利者这样做的结果，将使较高现值的投资组合价格下降，而较低现值的投资组合价格上升，直至套利机会消失，此时两种组合的现值相等。

无套利原理对无收益资产的现货-远期平价定理的反证法

考虑如下两种情况：

$$K > Se^{r(T-t)}?$$

$$K < Se^{r(T-t)}?$$

$$K > Se^{r(T-t)}$$

在t时刻，套利者可以按无风险利率r 借入S现金，期限为T-t。然后用S购买一单位标的资产，同时卖出一份该资产的远期合约，交割价格为K。

在T时刻，该套利者就可将一单位标的资产用于交割换来K现金，并归还借款本息 $Se^{r(T-t)}$，这就实现了$K-Se^{r(T-t)}$ 的无风险利润。

$$K < Se^{r(T-t)}$$

在t时刻，卖空标的资产，将所得收入以无风险利率进行投资，期限为T-t。同时买进一份该标的资产的远期合约，交割价格为K。

在T时刻，套利者收到投资本息 $Se^{r(T-t)}$，并以K现金购买一单位标的资产，用于归还卖空时借入的标的资从而实现$Se^{r(T-t)}-K$的利润。

例：假设6 个月期的无风险年利率为4.17%（连续复利）。市场上正在交易一份标的证券为一年期零息债、剩余期限为6 个月的远期合约多头，其交割价格为970元，该债券的现价为960元。请问对于该远期合约的多头和空头来说，远期价值分别是多少？

解：根据题意，有

$$S = 960;\ K = 970;\ r = 4.17\%;\ T - t = 0.5$$

根据公式，该远期合约多头的远期价值f 为

$$f = S - Ke^{-r(T-t)} = 960 - 970e^{-4.17\%\times 0.5} \approx 10.02 \text{ 元}$$

该远期合约空头的远期价值为

$$-f = -10.02 \text{ 元}$$

3、远期价格的期限结构

远期价格的期限结构描述的是不同期限远期价格之间的关系。

$$F = Se^{r(T-t)}$$

$$F^{*} = Se^{r^{*}(T^{*}-t)}$$

$$F^{*} = Fe^{r^{*}(T^{*}-t)-r(T-t)}$$

设：F 为 T 时刻交割的远期价格；F^* 为 T^* 时刻交割的远期价格；
r 为 T 时刻到期的无风险利率；r^* 为 T^* 时刻到期的无风险利率；
$\hat{r}$ 为 T 到 T^* 时刻的无风险利率

远期利率与即期利率之间的无套利关系为

$$e^{r(T-t)} \times e^{\hat{r}(T^*-T)} = e^{r^*(T^*-t)}$$

即

$$r(T-t) + \hat{r}(T^*-T) = r^*(T^*-t)$$

得到

$$\hat{r} = \frac{r^*(T^*-t) - r(T-t)}{T^*-T}$$

由$F = Se^{r(T-t)}$，$F^* = Se^{r^*(T^*-t)}$，得到 $F^* = Fe^{r^*(T^*-t)-r(T-t)}$

不同期限远期价格之间的关系：

$$\boldsymbol{F^* = Fe^{\hat{r}(T^*-T)}}$$

作业1：

假设一个3个月期的远期合约，其标的资产为不分红的股票A。该股票A的现价为40，当时的无风险年利率为5%（连续复利）。

请设计在如下两种情况下，套利者的套利策略

情况1：假设远期价格为43

情况2：假设远期价格为39

（二）支付已知现金收益资产的远期价值、远期（期货）价格

1、支付已知现金收益资产的远期价值

已知现金收益的资产：在到期前会产生完全可预测的现金流的资产

例如：正现金收益的资产：附息债和支付已知现金红利的股票
负现金收益的资产：黄金、白银（支付存储成本）

令已知现金收益的现值为I，对黄金、白银来说， I 为负值。

构建组合

组合A： 一份远期合约多头加上一笔数额为$Ke^{-r(T-t)}$的现金

组合B： 一单位标的证券加上利率为无风险利率、期限为从现在到现金收益派发日、本金为I 的负债

远期合约到期时，两组合都等于一单位标的资产

$$f+Ke^{-r(T-t)}=S-I$$

$$f=S-I-Ke^{-r(T-t)}$$

理解：

在T时刻，组合A的价值等于一单位标的资产。在组合B中，由于标的证券的现金收益刚好可以用来偿还负债的本息，因此在T时刻，该组合的价值也等于一单位标的证券。

由于使用的是I 的现值，所以支付一次和多次现金收益的处理方法相同。

2、支付已知现金收益资产的现货—远期平价公式

根据F 的定义，可从上式求得：

$$F = (S - I)e^{r(T-t)}$$

理解：支付已知现金收益资产的远期价格等于标的证券现货价格与已知现金收益现值差额的无风险终值。

反证法

$$K > (S - I)e^{r(T-t)} ?$$

$$K < (S - I)e^{r(T-t)} ?$$

例：假设黄金现货价为每盎司733 美元，其存储成本为每年每盎司2 美元，一年后（期货到期前）支付，美元一年期无风险连续复利利率为4% 。

那么一年期黄金期货的理论价格为

$$F=(S-I)e^{r(T-t)}=(733-I)e^{4\%\times1}$$

其中，$I=-2e^{-4\%\times1}$=—1.92 ，故

$$F=(733+1.92)e^{4\%\times1}=764.91$$

例：考虑一个股价为$50的股票的10个月期远期合约。假设该股票在3个月、6个月、9个月时都支付红利$0.75，同时假设对所有到期日无风险利率都是8%（连续复利），则

$$I=0.75e^{-0.08\times 3/12}+0.75e^{-0.08\times 6/12}+0.75e^{-0.08\times 9/12}=2.162$$

$$F=(S-I)e^{r(T-t)}$$

$$=(50-2.162)e^{0.08\times 10/12}$$

$$=51.14$$

（三）支付已知收益率资产的远期价值、远期（期货）价格

1、支付已知收益率的资产的远期价值

支付已知收益率的资产：

在远期到期前将产生与该资产现货价格成一定比率的收益的资产

支付已知收益率资产的远期合约：

外汇远期和期货：外汇发行国的无风险利率

股指期货：市场平均红利率或零，取决于股指计算方式

远期利率协议：本国的无风险利率

建立组合：

组合A： 一份远期合约多头加上一笔数额$Ke^{-r(T-t)}$ 的现金；

组合B： $e^{-q(T-t)}$单位证券并且所有收入都再投资于该证券，其中q 为该资产按连续复利计算的已知收益率。

两种组合现值相等

$$f + Ke^{-r(T-t)} = Se^{-q(T-t)}$$

$$f = Se^{-q(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}$$

理解：一单位支付已知红利率资产的远期合约多头可由 $e^{-q(T-t)}$单位标的资产和 $Ke^{-r(T-t)}$ 单位无风险负债构成。

2、支付已知收益率资产的远期（期货）价格

支付已知收益率资产的远期价格为

$$F = Se^{(r-q)(T-t)}$$

例：假设3 个月期无风险年利率为4% （连续复利），沪深300指数预期红利收益率为1.5% 。当沪深300 指数为2200 点时，3个月后到期的沪深300股指期货的理论价格应为多少？

根据定价公式：

$$F = Se^{(r-q)(T-t)} = 2200e^{(4\%-1.5\%)\times 0.25} = 2213.8$$

四、持有成本

持有成本（Cost of Carrying）

= 保存成本+ 利息成本 – 标的资产在合约期限内的收益

例如：

- 不支付红利的股票，没有保存成本和收益，所以持有成本就是利息成本r
- 股票指数的持有成本是$r-q$
- 外币的持有成本是$r-r_f$

远期和期货定价中运用持有成本（ c ）概念： $F=Se^{c(T-t)}$

五、消费性资产的远期合约定价

消费性资产是指那些投资者主要出于消费目的而持有的资产，如石油、铜、农产品等。

对于消费性资产来说，远期定价公式为

$$F \leq Se^{c(T-t)}$$

六、非完美市场上的定价

1、非完美市场上的定价：存在交易成本

假定每一笔交易的费率为Y，那么不存在套利机会的远期价格就不再是确定的值，而是一个区间

$$\left[S(1-Y)e^{r(T-t)}, S(1+Y)e^{r(T-t)}\right]$$

非完美市场上的定价

2、非完美市场上的定价：借贷存在利差

如果用r_b表示借入利率，用r_l表示借出利率，对非银行的机构和个人，一般是$r_b > r_l$。这时远期和期货的价格区间为：

$$\left[Se^{r_l(T-t)}, Se^{r_b(T-t)}\right]$$

非完美市场上的定价

3、非完美市场上的定价：存在卖空限制

现货持有者不一定套利，同时存在卖空限制：

因为卖空会给经纪人带来很大风险，所以几乎所有的经纪人都扣留卖空客户的部分所得作为保证金。假设由于卖空限制增加的成本比例为X，那么均衡的远期和期货价格区间应该是：

$$\left[(1-X)Se^{r(T-t)}, Se^{r(T-t)}\right]$$

非完美市场上的定价

4、非完美市场上的定价：综合考量

如果上述三种情况同时存在，远期和期货价格区间为：

$$\left[(1-X)S(1-Y)e^{r_l(T-t)},S(1+Y)e^{r_b(T-t)}\right]$$

完美市场可以看成是$X=0,Y=0,r_b=r_l=r$的特殊情况。