第二节利率互换

1、利率互换

2、利率互换的定价

一、利率互换概述

- 利率互换是交易双方签订的一种合约，彼此同意在合约规定的期间内互相交换一定的现金流，该现金流以同一种货币计算，但计算利息的方式不同。
- 利率互换实质上就是协议双方对未来两组利息现金流进行的交换，是同种货币之间进行的利息交换，一般只交换两种利息流的差额。名义本金只是用于双方在计算所需交换的利息时使用，并不真正做本金的交换。
- 最常见的利率互换是按照一个确定的本金数额，一方支付固定利率，另一方支付浮动利率。这种利率互换也称为标准利率互换，相应的固定利率被称为互换利率。
- 在利率互换中，浮动利率一般会参照某一个市场利率，在约定的利率确定日来确定，这一点与远期利率协议有些类似 。

阅读：浮动利率——LIBOR

LIBOR 是伦敦同业银行拆借利率(London Interbank Offered Rate)的缩写，它是银行之间短期无抵押拆借利率。在每个业务日，通常是计算针对10 种货币和15 个借贷期限的LIBOR 利率。借贷期限从1 天到1 年不等。

在全球市场上， LIBOR 利率被用作好几百万亿美元交易的参考利率。一种常见的以LIBOR 作为参考利率的衍生产品是利率互换

英国银行家协会(British Bankers Association , BBA) 在每个业务日的上午11 点半(英国时间)发布当天的LIBOR 利率。为了计算LIBOR 利率，英国银行家协会征询一些银行，看它们在正好上午11点(英国时间)以前，银行借入资金的利率。

对于不同银行给出的报价，英国银行家协会删去前1/4 的最高报价和后1/4 的最低报价，然后计算中间数据的平均值，这个平均值就是当天的LIBOR 报价。

一般来讲，所有提供报价的银行的信用评级都是AA 级，因此，LIBOR常被看作AA 级金融机构之间的无抵押借贷利率。

二、利率互换的原理（比较优势）

由于不同筹资者的信用等级不同，地理位置不同，对金融工具的使用熟练程度不同，获取不同资金的难易程度不同，在筹资成本上存在着比较优势

在信用市场中，一般来说，信用等级高的公司在固定利率市场上有比较优势，而信用等级低的公司在浮动利率市场上有比较优势。利率互换使这些不同信用等级的公司能够发挥各自的比较优势，节约融资成本

双方进行利率互换的主要原因是双方在固定利率和浮动利率市场上具有比较优势

1、利率互换示例

- A公司是信用评级为AAA级的大型级优公司，其固定利率融资成本为7%，
浮动利率融资成本为6个月期的LIBOR+0.4%
- B公司是信用评级为BBB级的中小型公司，其固定利率融资成本为8.5%，
浮动利率融资成本为6个月期的LIBOR+0.7%
- 假定A、B公司都想借入5年期的1000万美元的借款，根据公司资产负债管理要求，
  A想借入与6个月期相关的浮动利率借款
  B想借入固定利率借款

	A公司	B公司	利差
固定利率融资成本	7%	8.5%	1.5%
浮动利率融资成本	LIBOR+0.4%	LIBOR+0.7%	0.3%
比较优势	固定利率融资	浮动利率融资	

从表中可以看出

A的借款利率均比B低，即A在两个市场都具有绝对优势

但在固定利率市场上，A比B的绝对优势为1.5%

而在浮动利率市场上，A比B的绝对优势为0.3%

这就是说，A在固定利率市场上有比较优势

而B在浮动利率市场上有比较优势

这样，双方就可利用各自的比较优势为对方借款

然后互换，从而达到共同降低筹资成本的目的

即A以7%的固定利率借入1000万美元

而B以LIBOR+0.7%的浮动利率借入1000万美元

由于本金相同，故双方不必交换本金，而只交换利息的现金流

即A向B支付浮动利息，B向A支付固定利息

通过发挥各自的比较优势并互换，双方总的筹资成本降低了1.2%（即(8.5%-7.0%)-(6个月期LIBOR+0.70%-6个月期LIBOR-0.40%)），这就是互换利益。互换总利益=|固定利差-浮动利差|

互换利益是双方合作的结果，理应由双方分享，具体分享比例由双方谈判决定。

我们假定双方各分享一半，则双方都将使筹资成本降低0.6%，即双方最终实际筹资成本分别为：

A支付LIBOR-0.2%浮动利率

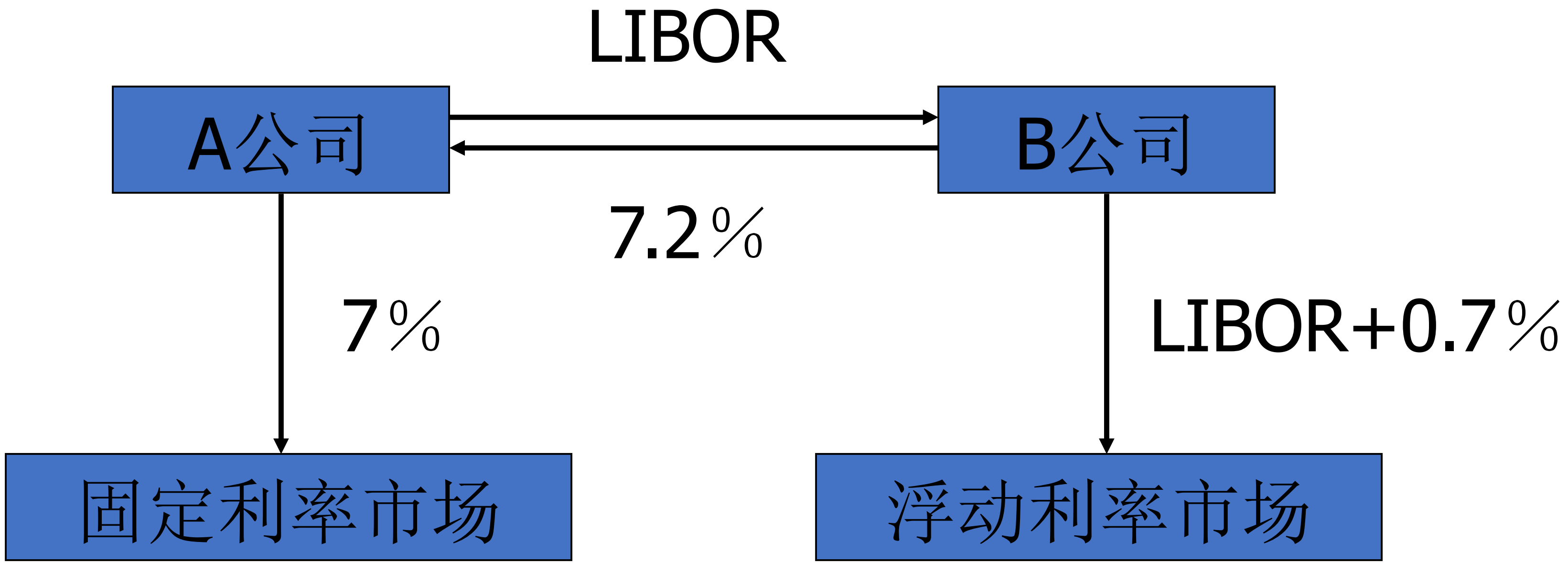
B支付7.9%的固定利率

下图为A、B两公司互换中，约定A向B支付LIBOR，B向A支付7.2%，
这一互换利率的结果不唯一，
也可以约定：

A向B支付LIBOR+0.1%，B向A支付7.3%

双方约定中的“总利益”保持1.2%即可

通过两个公司的比较优势，进行互换协议的流程图



- **A公司的融资成本为LIBOR-0.2％，在浮动利率融资市场上节约融资成本0.6％；B公司的融资成本为7.9％，在固定利率融资市场上节约融资成本0.6％。**

南開大學 Nankai University

互换过程中A公司的现金流（每期）

（1）支付固定利率市场7%

（2）从B公司收入固定利率7.2%

（3）支付B公司浮动利率LIBOR

每期支付成本：LIBOR-0.2%

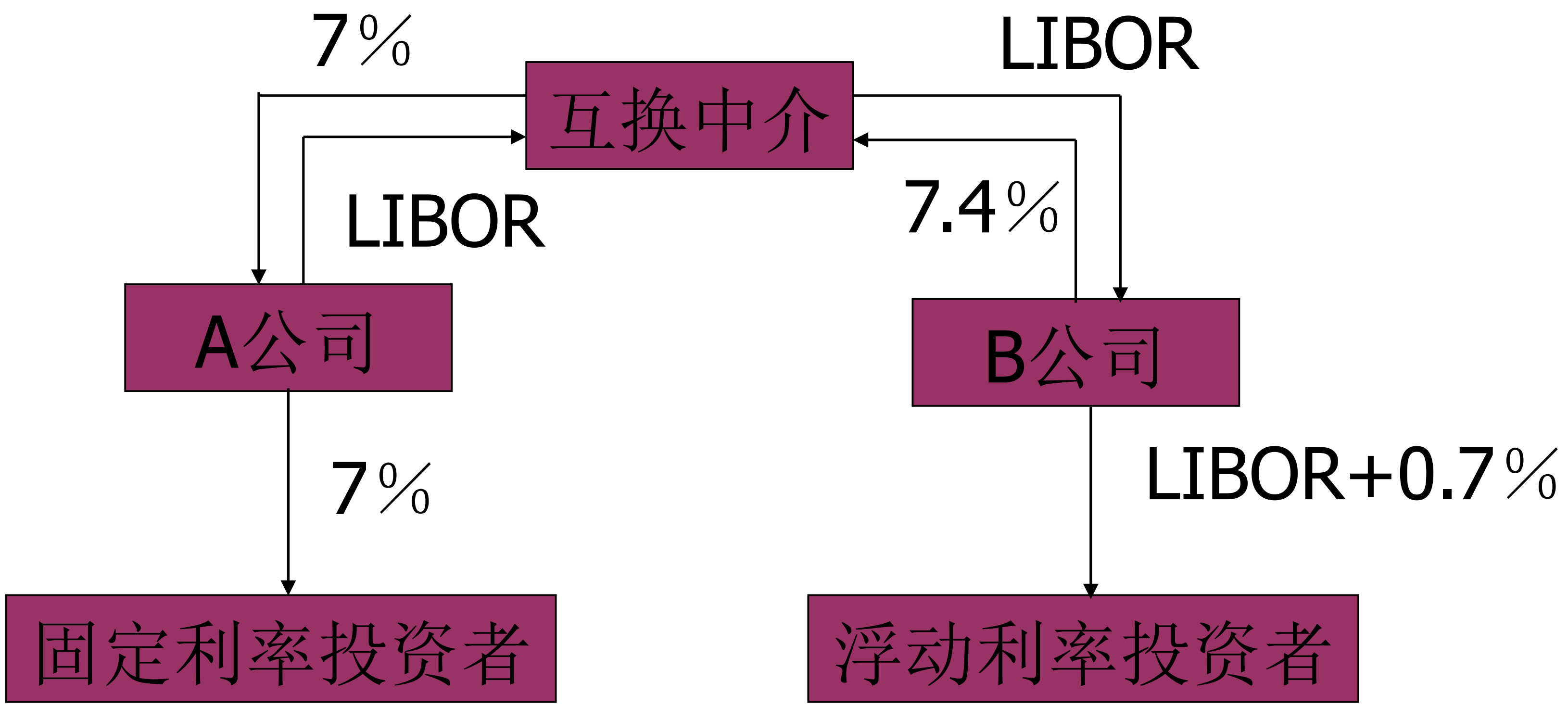
同理可得B公司的每期支付成本为7.9%

2、利率互换中金融中介的作用

- 互换中寻找互换对方需要花费很长的时间，还要承担彼此不认识的信用风险
- 金融机构与互换双方的业务往来较多，更容易找到潜在的互换者
- 金融机构可以凭借其信用降低交易双方的信用风险
- 中介者与交易双方分别签订互换协议，互换中介不需要额外资金，只是从中赚取服务费用或差价
- 如果中介无法找到两个完全匹配的互换方，可能会自己担任另一方的互换者，先行承担利率风险头寸，等到找到另一互换对方后，再将头寸轧平。

利率互换中存在金融中介的示例

在上例中，A、B公司通过金融中介进行互换的流程图



- **A公司的融资成本为LIBOR，在浮动利率融资市场上节约融资成本0.4％；B公司的融资成本为8.1％，在固定利率融资市场上节约融资成本0.4％。互换中介赚取利差为0.4％。（各0.2％）**

三、利率互换定价

（1）利率互换的定价问题

确定一个合理的固定利率，使得利率互换合约在其签订时，合约价值为0，合约对互换双方都是公平的。我们考虑一个标准的利率互换合约，浮动利率等于市场利率，确定它的合理的固定利率是多少。

与其他金融衍生工具一样，利率互换定价的基本思想也是无套利均衡原理。即通过建立利率互换与其他金融产品之间的等价关系，在市场不存在套利机会的前提下，利率互换合约的价值等于可以复制它的另外一个资产组合的价值。

分析利率互换的定价问题，我们可以构造如下的两种等价关系：第一是利率互换与债券组合的等价关系，第二是利率互换与一组远期利率协议的等价关系。

（2）利率互换合约的价值分析

互换合约的价值，是对于互换合约的买方（或卖方），持有这样一个合约能够给带来的价值，是互换合约买方（或卖方）的现金流净现值

在互换合约签订时，合约价值等于0。

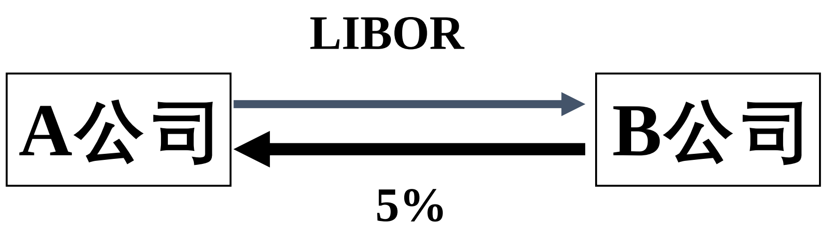
在互换合约的持有过程中，随着市场利率的变动，合约价值将不再等于0。如果市场利率上升，对于按浮动利率收取利息的买方来说，合约价值会上升；反之，如果市场利率下降，对于按浮动利率收取利息的买方来说，合约价值将会下降。

（3）利率互换定价中贴现率（或折现利率）的确定

- 贴现率： 在给互换和其它柜台交易市场上的金融工具定价的时候，现金流通常用LIBOR零息票利率（zero coupon rate）贴现
- 因为LIBOR反映了金融机构的资金成本。这样做的隐含假设是被定价的衍生工具的现金流的风险和银行同业拆借市场的风险相同

（4）运用债券组合给利率互换定价

考虑一个2003年9月1日生效的三年期的利率互换，名义本金是1亿美元。B公司同意支付给A公司年利率为5%的利息，同时A公司同意支付给B公司6个月期LIBOR的利息，利息每半年支付一次。



利率互换中B公司的现金流量表（百万美元）

日期	LIBOR	收到的浮动利息	支付的固定利息	净现金流
2003.9.1	4.20			
2004.3.1	4.80	+2.10	－2.50	－0.40
2004.9.1	5.30	+2.40	－2.50	－0.10
2005.3.1	5.50	+2.65	－2.50	＋0.15
2005.9.1	5.60	+2.75	－2.50	＋0.25
2006.3.1	5.90	+2.80	－2.50	＋0.30
2006.9.1	6.40	+2.95	－2.50	＋0.45

利率互换的分解

上述利率互换可以看成是两个债券头寸的组合。这样，利率互换可以分解成：

1、B公司按6个月LIBOR的利率（贷款期初）借给A公司1亿美元。

2、A公司按5%的年利率借给B公司1亿美元。

换个角度看，就是B公司向A公司购买了一份1亿美元的浮动利率（LIBOR）债券，同时A公司向B公司购买了一份1亿美元的固定利率（5%的年利率，每半年付息一次）债券。

利率互换的定价

定义

B_{fix} ：互换合约中分解出的固定利率债券的价值

B_{fl} ：互换合约中分解出的浮动利率债券的价值

那么这个互换的价值就是

$$V_{互换} = B_{fl} - B_{fix}$$

固定利率债券的价值 B_{fix}

定义

t_i ： 第*i*次现金流交换的时间（0为基期）

L ： 利率互换合约中的名义本金额

r_i ： 第*i*次交换时LIBOR零息票利率 (贴现率)

k ： 交换日支付的固定利息额

那么，固定利率债券的价值为

$$B_{fix} = \sum_{i=1}^{n} k e^{-r_i t_i} + L e^{-r_n t_n}$$

浮动利率债券的价值 B_{fl}

根据浮动利率债券的性质，在浮动利率债券支付利息后的那一刻，浮动利率债券的价值为其本金L。

假设利息下一支付日应支付的浮动利息额为 k^*(这是已知的），那么在利息支付那一刻，浮动利率债券的价值为（$L+k^*$）。

在我们的定义中，若距下一次利息支付日还有的时间 t_1，那么当前时刻浮动利率债券的价值应该为：

$$B_{fl} = (L+k^*)e^{-r_1 t_1}$$

注：浮动利率债券价值的理解

在浮动利率始终等于该债券的合理贴现率的条件下

1、浮动利率债券在发行时的价值就是其面值

2、在任意重新确定利率的时刻，付息之后的浮动利率债券价值等于新发行的同期限的浮动利率债券的面值，付息之前的浮动利率债券价值等于面值+应付利息

例：考虑一个3年期面值为Q的浮动利率债券，浮动利息每年末支付，到期偿还面值。

在0时刻对第一年应付利率是已知的为R1，但对第二、三年支付利率未知

在合理的假设下 1年期即期利率为R1

2年期即期利率为R2

3年期即期利率为R3

那么 第二、三年末应付利息的计算如下

利用远期利率R12

$$(1+R2)^2=(1+R1)\times(1+R12)$$

第二年应付利息为QR12

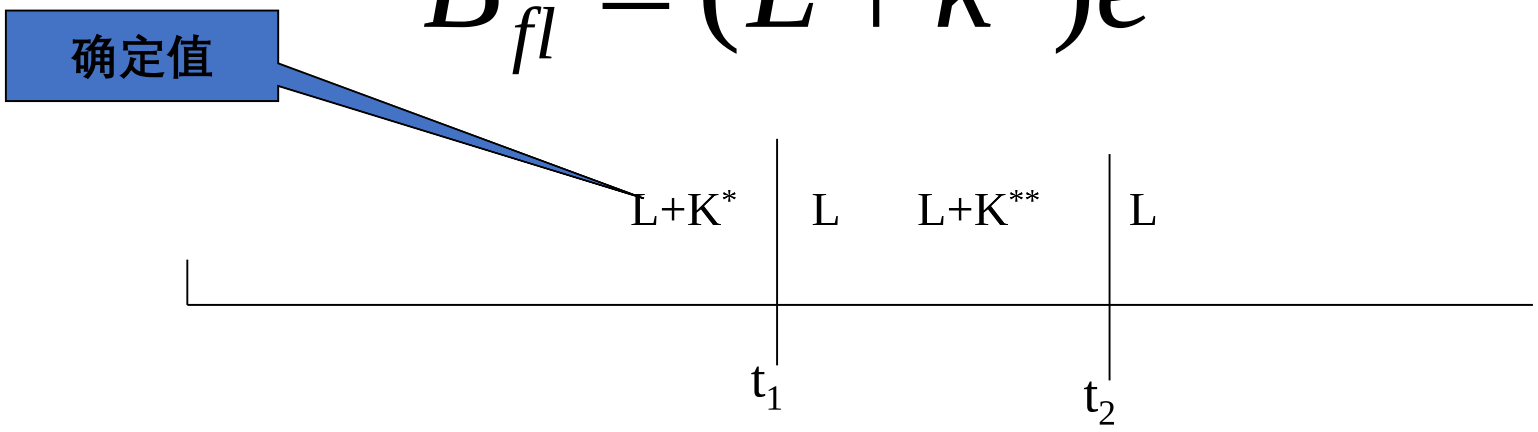
同理，第三年应付利息为QR23

$$(1+R3)^3=(1+R2)^2\times(1+R23)$$

这样可得 $$V=\frac{QR1}{(1+R1)}+\frac{QR12}{(1+R2)^2}+\frac{QR23+Q}{(1+R3)^3}$$

$$V=Q$$

$$B_{fl} = (L + k^*)e^{-r_1 t_1}$$



于是，我们得到互换的价值

$$V_{互换} = B_{fl} - B_{fix}$$

$$= (L + k^*)e^{-r_1 t_1} - (\sum_{i=1}^{n} k e^{-r_i t_i} + L e^{-r_n t_n})$$

公式总结

利率互换中

一个支付固定利率、收入浮动利率公司的价值

$$V_{互换} = B_{fl} - B_{fix}$$

一个收入固定利率，支付浮动利率公司的价值

$$V_{互换} = B_{fix} - B_{fl}$$

例：假设在一笔互换合约中，某一金融机构支付6个月期LIBOR，同时收取8%的年利率（半年计一次复利），名义本金为1亿美元。互换还有1.25年的期限。

3个月、9个月和15个月的LIBOR（连续复利率）分别为10%、10.5%和11%。

上一次利息支付日的6个月LIBOR为10.2%（半年计一次复利）。

在这个例子中$k=\$400$ 万，$k^{*}=\$510$ 万，

因此

$$B_{fix}=4e^{-0.1*0.25}+4e^{-0.105*0.75}+104e^{-0.11*1.25}=\$0.9824\text{亿}$$

$$B_{fl}=(100+5.1)e^{-0.1*0.25}=\$1.0251\text{亿}$$

利率互换的价值为(收入固定利率，支付浮动利率的一方)

$$98.24-102.51=-\$427\text{万}$$

（5）运用远期利率协议给利率互换定价

远期利率协议（FRA）是事先确定将来某一时间一笔借款的利率。在FRA执行的时候，支付的只是市场利率与合约协定利率的利差。

FRA可以看成是一个将用事先确定的利率（远期利率）交换浮动利率（市场利率）的合约。

互换可以看成是一系列FRA的组合。

Nankai University 南開大學

我们重新计算上面的例子

- 3个月后要交换的现金流是已知的，金融机构是用10.2%的年利率换入8%年利率。所以这笔交换对金融机构的价值是：

$$100\times(0.5\times0.08-0.5\times0.102)e^{-0.1\times0.25}=-\$107万$$

- 为了计算9个月后那笔现金流交换的价值，我们必须先计算从现在开始3个月到9个月的远期利率。根据远期利率的计算公式3个月到9个月的远期利率（以年计算的连续复利）为

$$r_f=\frac{r_l t_l-r_s t_s}{t_l-t_s}=\frac{0.105\times0.75-0.10\times0.25}{0.5}=0.1075$$

注：计算出来的远期利率是连续复利的（年计算的）。
由于每年仅有两次现金流支付，所以，相当于每半年复利一次。

假设r_C是连续复利的利率，r_m是与之等价的每年计算m次复利的利率，那么

$$(1+\frac{r_m}{m})^m = e^{r_c} \Rightarrow r_m = m(e^{r_c/m}-1)$$

根据题意，0.1075的连续复利对应的每半年计一次复利的利率为

$$r_m = m(e^{r_c/m}-1) = 2(e^{0.1075/2}-1) = 0.11044$$

所以，9个月后那笔现金流交换的价值为：

$$100\times(0.5\times0.08-0.5\times0.11044)e^{-0.105\times0.75}=-\$141万$$

同样，为了计算15个月后那笔现金流交换的价值，我们必须先计算从现在开始9个月到15个月的远期利率。

$$r_f=\frac{r_l t_l-r_s t_s}{t_l-t_s}=\frac{0.11\times1.25-0.105\times0.75}{0.5}=0.1175$$

$$2\times(e^{-0.1175\times0.5}-1)=0.12102$$

所以，15个月后那笔现金流交换的现值为

$$100\times(0.5\times0.08-0.5\times0.12102)e^{-0.11\times1.25}=-\$179万$$

于是作为远期利率协议的组合，这笔利率互换的价值为

-107-141-179=-427万美元

该结果与运用债券组合定出的利率互换价值一致

（6）合理互换利率的确定

合理的互换利率就是使得利率互换价值为零的固定利率，

即，互换开始时刻时

$$B_{fix} = B_{fl}$$

利率互换协议中合理的固定利率就是使得互换价值为零的利率水平，也就是我们通常所说的互换利率。

南開大學 Nankai University

假设在一笔 2 年期的利率互换协议中，某一金融机构支付 3 个月期的 LIBOR， 同时每 3 个月收取固定利率（3 个月计一次复利）， 名义本金为 1 亿美元。

目前 3 个月、6 个月、 9 个月、 12 个月、 15 个月、 18 个月、 21 个月与 2 年的贴现率（连续复利）分别为 4.8% 、 5% 、 5.1% 、 5.2% 、 5.15% 、 5.3% 、 5.3% 与 5.4% 。第一次支付的浮动利率即为当前 3 个月期利率 4.8% （连续复利）。

试确定此笔利率互换中合理的固定利率。

令

$$B_{fl} = 10000\text{万美元}$$

$$B_{fix} = \frac{k}{4}e^{-0.048\times0.25} + \frac{k}{4}e^{-0.05\times0.5} + \frac{k}{4}e^{-0.051\times0.75} + \frac{k}{4}e^{-0.052\times1} + \frac{k}{4}e^{-0.0515\times1.25} + \frac{k}{4}e^{-0.053\times1.5} + \frac{k}{4}e^{-0.053\times1.75} + \left(10000 + \frac{k}{4}\right)e^{-0.054\times2}$$

$$= 10000\textbf{万美元}$$

k = 543 美元，即固定利率水平应确定为 5.43%（3个月计一次复利）。

南開大學 Nankai University

互换利率的确定公式

假设利率互换的互换周期为每半年一次，互换利率为r_s，在契约期间共互换n次。则契约到期日可视为n/2年，固定利率债券的价值B_{fix}在t=0时为

$$B_{fix}=100\left(\frac{r_s}{2}\right)\left(e^{-r_1\times\frac{1}{2}}+e^{-r_2\times\frac{2}{2}}+e^{-r_3\times\frac{3}{2}}+\ldots+e^{-r_n\times\frac{n}{2}}\right)+100e^{-r_n\times\frac{n}{2}}$$

而 $B_{fl}=100$ 。令$B_{fix}=B_{fl}$ 则可得

$$r_s=\frac{2\left(1-e^{-r_n\times\frac{n}{2}}\right)}{\sum_{t=1}^{n}e^{-r_t\times\frac{t}{2}}}$$