限制表示

设 G 是有限群. H 是 G 的正规子群 (指数是2 i.e. $[G:H]=2$) (ρ, V) 是 G 的复不可约表示.

$$\left.\begin{array}{ll} \forall h\in H, & g\notin H \\ \exists h_1\in H & hg = gh_1 \end{array}\right\} \text{正规子群. } gHg^{-1}=H$$

问题: $\mathrm{Res}\,\rho$ 是不是 H 的不可约表示

设 W 是 V 的不可约 H-不变子空间. (W 是 $\mathrm{Res}\,\rho$ 的不可约子表示).

取 $g\notin H$, gW 是 V 的 H-不变子空间. $hgW = gh_1W \subseteq gW$

$V \overset{?}{=} W + gW$, $\quad g(W+gW) = gW + \underset{\substack{\cap \\ H}}{g^2}W$ (因为 $[G:H]=2$) $\Rightarrow$ $W+gW$ 是 V 的 G-不变子空间.

V 是 G 的不可约表示空间 $\Rightarrow$ $V = W+gW$

W 是 H 的不可约表示空间 $\Rightarrow$ $W\cap gW = \{0\}$ 或 W

结论 $V = W\oplus gW$ $\begin{cases} W\neq gW & V=W\oplus gW \quad (\mathrm{Res}\,\rho, V)\text{是 } H \text{ 的可约表示} \\ W = gW & V=W \quad (\mathrm{Res}\,\rho, V)\text{是 } H \text{ 的不可约表示.} \end{cases}$

$W' = gW$ 称为 W 的共轭表示

$$\begin{tikzcd} gW \arrow[r, "ghg^{-1}\in H"] & gW \\ W \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h"] & W \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

计算特征标。 设 χ 是 (ρ, V) 的特征标。

ρ 不可约 $\Rightarrow$ $1=(\chi,\chi)_G=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi(g)}\chi(g)=\frac{1}{|G|}\sum_{h\in H}\overline{\chi(h)}\chi(h)+\frac{1}{|G|}\sum_{g\notin H}\overline{\chi(g)}\chi(g)$

$\frac{1}{|G|}\sum_{h\in H}\overline{\chi(h)}\chi(h) = \frac{|H|}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\overline{\chi(h)}\chi(h)$

$$\frac{|H|}{|G|}(\mathrm{Res}\chi,\ \mathrm{Res}\chi)_H+\frac{1}{|G|}\sum_{g\notin H}\overline{\chi(g)}\chi(g)=1$$

$\frac{|H|}{|G|}=\frac{1}{2}$, $\sum_{g\notin H}\overline{\chi(g)}\chi(g)\geq 0$ $\Rightarrow$ $(\mathrm{Res}\chi,\ \mathrm{Res}\chi)_H\leq 2$. $\Longrightarrow$ $(\mathrm{Res}\chi,\ \mathrm{Res}\chi)_H=1$ 或 2

$V=W$ 或 $W\oplus gW$

1. $(\mathrm{Res}\chi,\ \mathrm{Res}\chi)_H=1\Longleftrightarrow \mathrm{Res}\rho$ 是 H 的复不可约表示。 $\Longleftrightarrow \exists g\notin H \quad \chi(g)\neq 0$

2. $(\mathrm{Res}\chi,\ \mathrm{Res}\chi)_H=2\Longleftrightarrow \mathrm{Res}\rho=\rho_1\oplus\rho_2$, ρ_1,ρ_2 是 H 的不等价不可约表示。$\Longleftrightarrow \sum_{g\notin H}\overline{\chi(g)}\chi(g)=0\Longleftrightarrow\chi(g)=0, \forall g\notin H$

例 S_5 的特征标表

		$\{1\}$	$\{(12)\}\notin A_5$	$\{(123)\}$	$\{(12)(34)\}$	$\{(1234)\}$	$\{(123)(45)\}$	$\{(12345)\}$
φ_1	χ_1	1	1	1	1	1	1	1
	χ_2	1	-1	1	1	-1	-1	1
φ_2	χ_3	4	-2	1	0	0	-1	-1
	χ_4	4	-2	1	0	0	1	-1
φ_3	χ_5	5	1	-1	1	-1	1	0
	χ_6	5	-1	-1	1	1	-1	0
	χ_7	6	0	0	-2	0	0	1

找 A_5 的不可约表示.

A_5 的共轭类: $\{1\}$, $\{(123)\}$, $\{(12)(34)\}$, $\{(12345)\}$, $\{(21345)\}$.

$\chi_i((12)) \neq 0$, $i=1,2,3,4,5,6$ $\Rightarrow \mathrm{Res}\,\chi_i$ 是 A_5 的不可约表示, $\underbrace{\mathrm{Res}\,\chi_1 = \mathrm{Res}\,\chi_2}_{=\varphi_1}$, $\underbrace{\mathrm{Res}\,\chi_3 = \mathrm{Res}\,\chi_4}_{=\varphi_2}$, $\underbrace{\mathrm{Res}\,\chi_5 = \mathrm{Res}\,\chi_6}_{=\varphi_3}$

$\mathrm{Res}\,\chi_7 = \varphi_4 + \varphi_5$. φ_4, φ_5 是 A_5 的不可约表示.

A_5

	$\{1\}$	$\{(123)\}$	$\{(12)(34)\}$	$\{(12345)\}$	$\{(21345)\}$
φ_1	1	1	1	1	1
φ_2	4	1	0	-1	-1
φ_3	5	-1	1	0	0
φ_4	3	α_2	α_3	α_4	α_5
φ_5	3	β_2	β_3	β_4	β_5

$\chi_7 = \varphi_4 + \varphi_5$ $\qquad \alpha_2+\beta_2=0 \qquad \alpha_3+\beta_3=-2. \qquad \alpha_4+\beta_4=1, \qquad \alpha_5+\beta_5=1$

第二正交关系. $\Longrightarrow \varphi_4, \varphi_5$

$[G:H]=2 \qquad \mathrm{Res}\,\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ or 不可约

$H<G$ $\quad(\rho, V)$是G的表示. $\quad(\mathrm{Res}_H\rho, V)$是$H$的表示

(θ, W)是H的表示. $\overset{?}{\rightsquigarrow}$ G的表示.

诱导表示.

(ρ, V)是G的表示. 记$\theta=\mathrm{Res}\rho$. 设W是V的H-不变子空间.

取$g\in G$. gW不一定是H的不变子空间. 若$g_1=gh$ 则 $g_1W=ghW\subseteq gW$. $gW=g_1h^{-1}W\subseteq g_1W\Rightarrow gW=g_1W$

gW只依赖于g的左陪集gH. 记$W_{\bar g}=gW=\sum\limits_{\underbrace{g_1\in gH}} g_1W$ $\quad\bar g=gH$是g的左陪集

$\sum\limits_{\bar g\in G/H} W_{\bar g}$是$V$的$G$-不变子空间.($G$的表示) $\quad\sum\limits_{\bar g} W_{\bar g}=\sum\limits_{g\in G} gW$

定义: 如果 $\underline{V=\bigoplus\limits_{\bar g\in G/H} W_{\bar g}}$, 那么$(\rho, V)$称为$(\theta, W)$的诱导表示. 记为 $\rho=\mathrm{Ind}_H^G\theta$ $\quad\mathrm{Ind}\uparrow\theta$ $\quad\mathrm{Ind}\,\theta$

$V=\mathrm{Ind}_H^G W$ $\quad\mathrm{Ind}\uparrow W$ $\quad\mathrm{Ind}\,W$

$G/H=\{g_1H, g_2H, \cdots, g_mH\}$是左陪集的集合.

例. W 是 H 的1维平凡表示. $W_{\bar{g}_i}$ 是1维线性空间. $W_{\bar{g}_i} \longleftrightarrow \bar{g}_i = g_i H$

$g \cdot W_{\bar{g}_i} = W_{\overline{gg_i}}$ 是 $\{\bar{g}_1, \cdots, \bar{g}_m\}$ 的置换.

$\mathrm{Ind}_H^G W$ 是集合 $\{\bar{g}_1, \cdots, \bar{g}_m\} = G/H$ 上的置换表示.

例: R_H 是 H 的左正则表示. $W = \mathbb{C}H$ $H = \{h_1, \cdots, h_k\}$.

$W_{\bar{g}} = g\,\mathbb{C}H$ 的基是 $\{gh_1, \cdots, gh_k\} = gH$. g 的左陪集.

$\bigoplus \underbrace{W_{\bar{g}} \text{ 的基是}}_{g \cdot h_i} \bigcup_{\bar{g} \in G/H} gH = G. \Rightarrow \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}H = \mathbb{C}G$ (G 的左正则表示)

从 H 的表示 (θ, W) 出发，怎么构造 $\mathrm{Ind}_H^G\theta$

考虑张量积：$\underline{\mathbb{F}G} \otimes W = \{ \sum_i g_i \otimes w_i \mid g_i \in G, w_i \in W \}$.

G 的作用：$g(\sum_i g_i \otimes w_i) = \sum_i gg_i \otimes w_i$

希望 $gW = \{ g\otimes w \mid w \in W \}$. 只依赖于 g 的左陪集 gH. 即若 $g_1 = gh$，则 $g_1 W = gW$，即 $gh\otimes w$ 与 $g\otimes hw$ 被看作同一个向量.

定义. $\mathrm{Ind}_H^G W = \mathbb{F}G \otimes W / \langle gh\otimes w - g\otimes hw \rangle := \mathbb{F}G \otimes_{\mathbb{F}H} W$ （$\mathbb{F}G$ 看作是 $\mathbb{F}H$ 的右模，W 是 $\mathbb{F}H$ 的左模）

$gh\otimes w = g\otimes hw$

$\mathrm{Ind}_H^G W = \underline{\bigoplus_{g\in G/H} g\otimes W}$ 的一组基为 $\{ g_i \otimes e_j \}$ 　　g_i 是左陪集 g_iH 的代表元，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 W 的基.

$\dim \mathrm{Ind}_H^G W = [G:H] \dim W$

g 在 $\mathrm{Ind}_H^G W$ 上的作用：$g(g_i \otimes e_k) = gg_i \otimes e_k = g_j \underbrace{(g_j^{-1} g g_i)}_{H} \otimes e_k$.

$= g_j \otimes (g_j^{-1} g g_i) e_k \in g_i \otimes W$

g_j 满足 $g_j^{-1} g g_i \in H$

即、$gg_i \in g_j H$

$g \cdot g_i H = g_j H$

在基 $\{g_i \otimes e_k\}$ 下，$\mathrm{Ind}_H^G \theta(g)$ 的矩阵为

$$\mathrm{Ind}_H^G \theta(g) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}(g_1^{-1} g g_1) & \hat{\theta}(g_1^{-1} g g_2) & \cdots & \hat{\theta}(g_1^{-1} g g_m) \\ \hat{\theta}(g_2^{-1} g g_1) & \hat{\theta}(g_2^{-1} g g_2) & \cdots & \hat{\theta}(g_2^{-1} g g_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\theta}(g_m^{-1} g g_1) & \hat{\theta}(g_m^{-1} g g_2) & \cdots & \hat{\theta}(g_m^{-1} g g_m) \end{bmatrix}$$

其中，$\hat{\theta}(g_j^{-1} g g_i) = \begin{cases} \theta(g_j^{-1} g g_i) & g_j^{-1} g g_i \in H \\ 0 & g_j^{-1} g g_i \notin H \end{cases}$

例：$G = S_3 = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = 1,\ a^{-1}ba = b^2 \rangle$　　$H = \langle b \mid b^3 = 1 \rangle$

H 的表示 (θ, W)，$W = \mathbb{R}^2$．　$\theta(b) = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix}$

$\mathrm{Ind}_H^G W = W \oplus \bar{a}W$　　$W = \{1 \otimes w \mid w \in W\}$．　$\bar{a}W = \{a \otimes w \mid w \in W\}$．　$G = H \cup aH$

设 W 的基为 $\{e_1, e_2\}$．　$\mathrm{Ind}_H^G W$ 的基为 $\{1\otimes e_1, 1\otimes e_2, a\otimes e_1, a\otimes e_2\}$，　$g(g_i \otimes e_k) = gg_i \otimes e_k$

$\mathrm{Ind}\theta(a)$：
$$1\otimes e_1 \mapsto a\otimes e_1$$
$$1\otimes e_2 \mapsto a\otimes e_2$$
$$a\otimes e_1 \mapsto a^2\otimes e_1 = 1\otimes e_1$$
$$a\otimes e_2 \mapsto a^2\otimes e_2 = 1\otimes e_2$$

$$\mathrm{Ind}\theta(a) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\mathrm{Ind}\theta(b)$：
$$1\otimes e_1 \mapsto b\otimes e_1 = 1\otimes be_1 = 1\otimes \cos\tfrac{2\pi}{3}\cdot e_1 + 1\otimes \sin\tfrac{2\pi}{3} e_2$$
$$1\otimes e_2 \mapsto b\otimes e_2 = 1\otimes be_2 = -1\otimes \sin\tfrac{2\pi}{3} e_1 + 1\otimes\cos\tfrac{2\pi}{3} e_2$$
$$a\otimes e_1 \mapsto ba\otimes e_1 = ab^2\otimes e_1 = a\otimes b^2 e_1 = a\otimes b^{-1}e_1 = a\otimes\cos\tfrac{-2\pi}{3} e_1 + a\otimes \sin\tfrac{-2\pi}{3} e_2$$
$$a\otimes e_2 \mapsto ba\otimes e_2 = ab^2\otimes e_2 = a\otimes b^{-1}e_2 = -a\otimes \sin\tfrac{-2\pi}{3} e_1 + a\otimes\cos\tfrac{-2\pi}{3} e_2$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} \theta(b) & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \hline 0 \quad 0 & & \\ 0 \quad 0 & \theta(b^{-1}) & \end{array}\right]$$

$\mathrm{tr}\,\mathrm{Ind}\theta(a) = 0$．　$\mathrm{tr}\,\mathrm{Ind}\theta(b) = -2$．　$\mathrm{tr}\,\mathrm{Ind}\theta(ab) = 0$　$\Rightarrow$　$\mathrm{Ind}\theta = \rho_2 \oplus \rho_2$　　ρ_2 是 S_3 的2维不可约表示．

设φ是θ的特征标. $\mathrm{Ind}\varphi$是诱导表示的特征标.

$$\mathrm{Ind}\varphi(g)=\sum_{i=1}^{m} \mathrm{tr}\,\hat{\theta}(g_i^{-1}gg_i) = \sum_{i=1}^{m}\hat{\varphi}(g_i^{-1}gg_i)$$

$$\hat{\varphi}(g)=\begin{cases}\varphi(g) & g\in H\\ 0 & g\notin H\end{cases}$$ 称为φ在G上的延拓

$$\mathrm{Ind}\varphi(g)=\frac{1}{|H|}\sum_{t\in G}\hat{\varphi}(t^{-1}gt) \qquad |g_iH|=|H|$$

$\mathrm{Ind}\varphi$是φ诱导的G上的函数

例. $G=\{x,y \mid x^3=1, y^7=1, x^{-1}yx=y^3\}$. $H=\langle y, \mid y^7=1\rangle$, H的1维表示θ: $\theta(y)=\eta$. $\eta^7=1$. $\eta=e^{\frac{2\pi i}{7}}$

$G/H=\{H, xH, x^2H\}$.

代表元. 1 x. x^2

G的共轭类	$\{1\}$	$\{y,y^2,y^4\}$	$\{y^3,y^5,y^6\}$	$\{xy^i\}_{i=0,\cdots,6}$	$\{x^2y^j\}_{j=0,\cdots,6}$
$\mathrm{Ind}\theta$	3	$\eta+\eta^3+\eta^4$	$\eta^3+\eta^5+\eta^6$	0	0

$$\mathrm{Ind}\,\theta(1)=\sum_{g_i=\{1,x,x^2\}}\hat{\varphi}(g_i^{-1}1g_i)=1+1+1=3$$

验证$(\mathrm{Ind}\theta, \mathrm{Ind}\theta)_G=1$.

$\mathrm{Ind}\theta$是不可约的

$$\mathrm{Ind}\,\theta(y)=\sum_{g_i=\{1,x,x^2\}}\hat{\varphi}(g_i^{-1}yg_i)=\hat{\varphi}(y)+\hat{\varphi}(\underbrace{x^{-1}yx}_{y^3})+\hat{\varphi}(\underbrace{x^{-2}yx^2}_{y^4})=\eta+\eta^3+\eta^4$$

$$\mathrm{Ind}\,\theta(y^3)=\eta^3+\eta^5+\eta^6$$

$$\mathrm{Ind}\,\theta(x)=\hat{\varphi}(x)+\hat{\varphi}(x^{-1}xx)+\hat{\varphi}(x^{-2}xx^2)=0+0+0=0$$

$$\mathrm{Ind}\,\theta(x^2)=0$$

Frobenius 互反律. 设 φ, χ 分别是 H, G 上的类函数, 则 $(\mathrm{Ind}\,\varphi, \chi)_G = (\varphi, \mathrm{Res}\,\chi)_H$

证明: $(\mathrm{Ind}\,\varphi, \chi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \mathrm{Ind}\,\varphi(g^{-1})\chi(g) = \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|} \sum_{g,t\in G} \hat{\varphi}(t^{-1}g^{-1}t)\chi(g)$

$t^{-1}g^{-1}t = s^{-1}$

$g = tst^{-1}$

$= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|} \sum_{s,t\in G} \hat{\varphi}(s^{-1})\chi(tst^{-1}) = \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|} \sum_{s,t\in G} \hat{\varphi}(s^{-1})\chi(s)$

$= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|} \sum_{s\in G} \hat{\varphi}(s^{-1})\chi(s)\,|G| = \frac{1}{|H|} \sum_{s\in G} \hat{\varphi}(s^{-1})\chi(s)$

$= \frac{1}{|H|} \sum_{s\in H} \varphi(s^{-1})\chi(s) = \frac{1}{|H|} \sum_{s\in H} \varphi(s^{-1})\,\mathrm{Res}\,\chi(s) = (\varphi, \mathrm{Res}\,\chi)_H$

设 φ 是 H 的表示 (θ, W) 的特征标, χ 是 G 的表示 (ρ, V) 的特征标. 则 $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}\,\theta, \rho) \cong \mathrm{Hom}_H(\theta, \mathrm{Res}\,\rho)$ 同构构造可参见课本

$\rho_1 = \oplus n_i\chi_i \quad \rho_2 = \oplus m_i\chi_i \Rightarrow \dim \mathrm{Hom}_G(\rho_1, \rho_2) = (\rho_1, \rho_2)$

例. $G=S_3$. $H=\langle b \mid b^3=1\rangle$

G	1	$\{a, ab, ab^2\}$.	$\overline{\{b, b^2\}}$
V_1	1	1	1
V_2	1	-1	1
V_3	2	0	-1

$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

H	1	b	b^2
W_1	1	1	1
W_2	1	ω	ω^2
W_3	1	ω^2	ω

H	1	b	b^2
$\mathrm{Res}\,V_1$	1	1	1
$\mathrm{Res}\,V_2$	1	1	1
$\mathrm{Res}\,V_3$	1	-1	-1

$\mathrm{Res}\,V_1 = (\mathrm{Res}\,V_1, W_1)_H W_1 \oplus (\mathrm{Res}\,V_1, W_2)_H W_2 \oplus (\mathrm{Res}\,V_1, W_3) W_3 = W_1$, $\mathrm{Res}\,V_2 = W_1$

$\mathrm{Res}\,V_3 = W_2 \oplus W_3$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\,W_1 &= (\mathrm{Ind}\,W_1, V_1)_G V_1 \oplus (\mathrm{Ind}\,W_1, V_2)_G V_2 \oplus (\mathrm{Ind}\,W_1, V_3)_G V_3 \\ &= (W_1, \mathrm{Res}\,V_1)_H V_1 \oplus (W_1, \underbrace{\mathrm{Res}\,V_2}_{W_1})_H V_2 \oplus \underbrace{(W_1, \underbrace{\mathrm{Res}\,V_3}_{W_2\oplus W_3})_H}_{0} V_3 \\ &= V_1 \oplus V_2\end{aligned}$$

$\mathrm{Ind}\,W_2 = V_3$, $\mathrm{Ind}\,W_3 = V_3$