实表示、

实线性空间 $\rightleftarrows$ 复线性空间.

设 V 是复 n 维线性空间. $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组基. $V=\{c_1e_1+\cdots+c_ne_n \mid c_1,\cdots,c_n\in\mathbb{C}\}$

V 可以看成一个实线性空间. 它的基为 $\{e_1,\cdots,e_n, \sqrt{-1}e_1,\cdots,\sqrt{-1}e_n\}$. $V=\{a_1e_1+\cdots+a_ne_n+b_1\sqrt{-1}e_1+\cdots+b_n\sqrt{-1}e_n \mid a_i\in\mathbb{R}, b_j\in\mathbb{R}\}$

这时. 记这样实线性空间为 $V_{\mathbb{R}}$, $V_{\mathbb{R}}=V_0\oplus\sqrt{-1}V_0$ $V_0=\{a_1e_1+\cdots+a_ne_n \mid a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}\}$ 称为 V 的实形.

这个定义可以表达成与基的选取无关的形式.

$\tau: V\to V$ 称为 V 上的共轭. 如果. $\tau(x+y)=\tau(x)+\tau(y)$, $\tau(cx)=\bar{c}\,\tau(x)$. $c\in\mathbb{C}$, $\tau^2(x)=x$. $\forall x,y\in V$

$V_0=\{x\in V \mid \tau(x)=x\}$ 是 V 的一个实形 ($\{x \mid \tau(x)=-x\}=\sqrt{-1}V_0$)

引理: 复线性空间的实形与共轭一一对应. (练习).

设 W 是实线性空间， $W^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W$ 称为 W 的复化．这里 $\mathbb{C}$ 看作是实2维线性空间．

W 是 $\mathbb{R}$-模．$\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的子群．$W^{\mathbb{C}}$ 是 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} W$

$W^{\mathbb{C}}$ 是复线性空间： $z\cdot(c\otimes w) := zc\otimes w$ ， $z, c\in\mathbb{C}$, $w\in W$.

$W^{\mathbb{C}}$ 的一组基是 $\{1\otimes e_1, \dots, 1\otimes e_n\}$．其中 $\{e_1,\dots,e_n\}$ 是 W 的基． $\dim_{\mathbb{C}} W^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} W$

命题：V 是复线性空间．W 是实线性空间，V_0 是 V 的实形．

$$(V_0)^{\mathbb{C}} \cong V \qquad (W^{\mathbb{C}})_0 \cong W$$

V: $e_1 \cdots e_n$

$\downarrow$

V_0 $e_1 \cdots e_n$

$\downarrow$

$(V_0)^{\mathbb{C}}$ $1\otimes e_1 \cdots 1\otimes e_n$

$$\{\text{实线性空间}\} \longleftrightarrow \{\text{复线性空间} + \text{共轭}\}$$

$$W \qquad\qquad (V, \tau)$$

命题：设 W_1 和 W_2 是实线性空间，则 $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W_1, W_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W_1^{\mathbb{C}}, W_2^{\mathbb{C}})$

特别地． $\mathbb{C}\otimes \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^{\mathbb{C}})$ $T: W_1^{\mathbb{C}} \to W_2^{\mathbb{C}}$ $T = \underset{\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W_1, W_2)}{\underset{\wedge}{T_1}} + \sqrt{-1}\, \underset{\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W_1, W_2)}{\underset{\wedge}{T_2}}$

实表示的复化

设(ρ_0, V_0)是G的实表示、$\rho_0: G \to GL(V_0)$ 群同态. V_0是实线性空间. $\rho_0(g) \in GL(n, \mathbb{R})$. $\dim_{\mathbb{R}} V_0 = n$.

$V_0^{\mathbb{C}}$ 是 V_0 的复化、设$\{e_1, \cdots, e_n\}$是V_0的基. 则 $V_0^{\mathbb{C}}$ 的基是 $\{1\otimes e_1, \cdots, 1\otimes e_n\}$.

设 $\rho_0(g)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$. $a_{ij} \in \mathbb{R}$, 则定义 $\rho(g) \in GL(V_0^{\mathbb{C}})$ 为 $\rho(g)(1\otimes e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (1\otimes e_i)$

$(\rho, V_0^{\mathbb{C}})$ 是G的复表示. 特征标 $\chi_{V_0^{\mathbb{C}}} = \chi_{V_0}$

命题: $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V_1^{\mathbb{C}}, V_2^{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ (验证实部与虚部与群作用交换).

一般地，(ρ_0, V_0)是不可约的，$(\rho, V_0^{\mathbb{C}})$可能变成可约的.

例. $G=\langle g \mid g^3=1\rangle$. $\rho_0(g)=\begin{bmatrix}\cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3}\end{bmatrix}$ $V_0=\mathbb{R}^2$

$V_0^{\mathbb{C}}=\mathbb{C}^2$. $\rho(g)=\rho_0(g)$作为复表示是可约的. $\rho(g)$等价于$\begin{bmatrix}\omega & \\ & \overline{\omega}\end{bmatrix}$. $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$

$\rho(g)$分解为2个1维复不可约表示的直和. $V_0^{\mathbb{C}}=W\oplus\overline{W}$

例. $G=Q_8=\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. $V_0=\mathbb{R}^4$. $\rho_0(i)=\begin{bmatrix}0 & -1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\rho_0(j)=\begin{bmatrix} & & -1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{bmatrix}$, $\rho_0(k)=\begin{bmatrix} & & 0 & -1 \\ & & -1 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \end{bmatrix}$.

$V_0^{\mathbb{C}}$是4维复线性空间. Q_8的2维不可约复表示只有1个. 记为W. $\Rightarrow$ $V_0^{\mathbb{C}}\cong W\oplus W$

$(\chi_0, \chi_0)=4$. $\Rightarrow$ (ρ_0, V_0)是实不可约的.

定理：设 (ρ_0, V_0) 是 G 的不可约实表示，特征标为 χ_0. 则 $(\chi_0, \chi_0) = 1, 2$, 或 4.

(Frobenius-Schur)

(1). 若 $(\chi_0, \chi_0)=1$. 则 $(\rho, V_0^{\mathbb{C}})$ 是不可约复表示. $\left((\chi_\rho, \chi_\rho) = (\chi_0, \chi_0) = 1 \right)$.

(2). 若 $(\chi_0, \chi_0)=2$ 则 $V_0^{\mathbb{C}} \cong W \oplus W^*$, 其中 W, W^* 是不可约复表示. 且 $W \not\cong W^*$

$$\left((\chi_0, \chi_0) = (\chi_W + \overline{\chi_W}, \chi_W + \overline{\chi_W}) = (\chi_W, \chi_W) + (\overline{\chi_W}, \overline{\chi_W}) = 1+1 = 2 \right)$$

(3) 若 $(\chi_0, \chi_0) = 4$ 则 $V_0^{\mathbb{C}} \cong W \oplus W$. 其中 W 是不可约复表示. 且 $W \cong W^*$.

$$\left((\chi_0, \chi_0) = (\chi_W + \chi_W, \chi_W + \chi_W) = (2\chi_W, 2\chi_W) = 4(\chi_W, \chi_W) = 4 \right).$$

证明：(思路). 设 τ 是 $V_0^{\mathbb{C}}$ 的共轭. 若 V_1 是 $V_0^{\mathbb{C}}$ 的不可约子表示. 则 $\overline{V} = \tau(V_1)$ 也是 $V_0^{\mathbb{C}}$ 的不可约子表示. $(\rho(g)\tau = \tau\rho(g))$.

$\cong V_1^*$ (算特征标).

$$V_0^{\mathbb{C}} \cong V_1 \oplus \overline{V_1} \quad \begin{cases} \nearrow \; V_1 \cong \overline{V_1} \\ \searrow \; V_1 \not\cong \overline{V_1} \end{cases}$$

实不可约表示的分类.

$$\begin{cases} (\chi_0, \chi_0)=1 & \text{实数型} \\ (\chi_0, \chi_0)=2 & \text{复数型} \\ (\chi_0, \chi_0)=4. & \text{四元数型.} \end{cases}$$

命题(第2章): (ρ_0, V_0)是实不可约表示$\Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_G(V_0, V_0)\cong\mathbb{R}$,或$\mathbb{C}$或$\mathbb{H}$.

命题.

$(\chi_0, \chi_0)=1 \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_G(V_0, V_0)\cong\mathbb{R}$

$(\chi_0, \chi_0)=2 \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_G(V_0, V_0)\cong\mathbb{C}$

$(\chi_0, \chi_0)=4 \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_G(V_0, V_0)\cong\mathbb{H}$

复不可约表示的分类.

问题：复不可约表示是否可以等价于实表示.

$\forall g\in G\quad \rho(g)\in GL(n,\mathbb{C})$. 能否同时共轭于 $\rho_0(g)\in GL(n,\mathbb{R})$. $\forall g\in G$

如果可以. 则称复表示 ρ 能在 $\mathbb{R}$ 上实现.

例：D_4 = 正方形的对称群 $=\langle a,b\mid a^2=1,\ b^4=1,\ a^{-1}ba=b^{-1}\rangle$.

$$\rho(a)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \rho(b)=\begin{bmatrix}\sqrt{-1}&0\\0&-\sqrt{-1}\end{bmatrix}\ \xrightarrow{\text{等价于}}\ \rho_0(a)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \rho_0(b)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2}&-\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2}&\cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}.$$

ρ 可以在 $\mathbb{R}$ 上实现.

例. $Q_8=\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$.

$$\rho(i)=\begin{bmatrix}i&\\&-i\end{bmatrix},\quad \rho(j)=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\quad \rho(k)=\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}$$ 不能在 $\mathbb{R}$ 上实现（后面验证）.

$\chi(1)=2$, $\chi(i)=0$, $\chi(j)=0$, $\chi(k)=0$

能在$\mathbb{R}$上实现的必要条件是特征标是实数 $\forall g\in G$. $\chi(g)\in\mathbb{R}$.

定义：如果 $\chi(g)\in\mathbb{R}$, $\forall g\in G$. 那么 χ 称为实特征标.

命题：χ_ρ 是实特征标 $\Longleftrightarrow$ $\rho\cong\rho^*$，即 ρ 是自对偶的. ($\chi_{\rho^*}(g)=\overline{\chi_\rho(g)}$)

定义：G的共轭类c称为实共轭类，如果 $g\in c$ 的逆元g^{-1}也在c中.

命题：不可约实特征标的数目等于实共轭类的数目.

证明：取逆元变换. $g\mapsto g^{-1}$ 给出特征标表的列置换P. $\operatorname{tr}P=|\{\text{不动点}\}|=|\{\text{实共轭类}\}|$

取共轭 $\chi\mapsto\bar{\chi}$ 给出特征标表的行置换Q $\operatorname{tr}Q=|\{\text{实特征标}\}|$

X是特征标表. $XP=\overline{X}=QX$. $P=X^{-1}QX$. $\operatorname{tr}P=\operatorname{tr}Q$

命题：$|G|$是奇数 当且仅当 G没有非平凡不可约实特征标. (G 没有非平凡实共轭类)

证明. $|G|$是奇数 $\Longrightarrow$ $\forall g\neq 1$. g与g^{-1}不共轭. (见课本).

$|G|$是偶数 $\Longrightarrow$ G有2阶元. $\exists\, g\neq 1$. $g=g^{-1}$ $\Rightarrow$ g的共轭类是实的.

G-不变双线性函数

(ρ, V) 是复不可约表示，ρ 能在 $\mathbb{R}$ 上实现，则 χ 是实特征标，$(\rho^*, V^*) \cong (\rho, V)$，但这个条件还不够。

$Hom(V, V^*) \cong V^* \otimes V^* \cong (V \otimes V)^*$　　V 与 V^* 的同构 等价于 $V \otimes V$ 上的线性函数 也就是 V 上的双线性函数 $B(x, y)$

G 在 V 上的作用 可以诱导在双线性函数上的作用，$(\rho(g) B)(x, y) = B(\rho(g^{-1})x, \rho(g^{-1})y)$.

引理：(ρ, V) 是复不可约表示，则

(1). 在相差常数倍的意义下，V 上的 G 不变双线性函数是唯一的。　$\dim(G\text{-不变双线性函数空间}) = 1$.

(2). V 上存在非退化 G-不变双线性函数 $\Leftrightarrow V \cong V^*$　　$\dim(\text{非退化 } G\text{-不变双线性函数}) \neq 0 \Leftrightarrow V \cong V^*$

(3). V 上 G-不变双线性函数一定是对称或反对称的。

$$\{G\text{-不变双线性函数}\} = \{G\text{-不变对称双线性函数}\} \oplus \{G\text{-不变反对称双线性函数}\}$$

证明见课本.（用不可约，类似于 Schur 引理）.

定理：设 (ρ, V) 是不可约复表示，则

(1) 若 $\rho \ncong \rho^*$，则 ρ 不能在 $\mathbb{R}$ 上实现

(2) 若 $\rho \cong \rho^*$，且 V 上有非退化反对称 G-不变双线性函数，则 ρ 不能在 $\mathbb{R}$ 上实现。

(3) 若 $\rho \cong \rho^*$ 且 V 上有非退化对称 G-不变双线性函数 则 ρ 能在 $\mathbb{R}$ 上实现。

$\overline{h(x, y)} = h(y, x)$

证明：V 上有对称 G-不变双线性函数 $B(x, y)$。V 本身有 G-不变内积 $h(x, y)$。

定义 $\tau' : V \to V$，使得 $B(x, y) = h(x, \tau'(y))$。由 τ' 可以得到 V 上的共轭 $\tau : V \to V$.（参考 Serre GTM42）

$V = V_0 \oplus \sqrt{-1} V_0$，$V_0 = \{x \in V \mid \tau(x) = x\}$ 实形。 $\dim_{\mathbb{R}} V_0 = \dim_{\mathbb{C}} V$

$\rho_0(g) = \rho(g)|_{V_0}$ 是实表示。（ρ 与 τ 可交换）

$\rho_0(g) \in GL(n, \mathbb{R})$

双线性函数空间. $(V\otimes V)^* \cong (S^2V)^* \oplus (\Lambda^2V)^*$

对称双线性函数 反对称双线性函数.

	$\rho(g)$的特征值	
V	$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$	
$V\otimes V$	$\lambda_i\lambda_j$	$\forall i,j$
S^2V	$\lambda_i\lambda_j$	$i\leq j$
Λ^2V	$\lambda_i\lambda_j$	$i<j$

$$\chi_{S^2(V)}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi(g)^2 + \chi(g^2)\right)$$

$$\chi_{\Lambda^2(V)}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi(g)^2 - \chi(g^2)\right)$$

定义. (Frobenius-Schur 指数) $\boxed{S(\rho) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^2) \quad \text{或} S(V)}$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{S^2(V)}(g) - \chi_{\Lambda^2(V)}(g)$$

$= \dim\{G\text{-不变对称双线性函数}\} - \dim\{G\text{-不变反对称双线性函数}\}$

$$= \begin{cases} 1-0 \\ 0-0 \\ 0-1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \rho\cong\rho^*. \ \exists \text{对称 } B(x,y) \\ 0 & \rho\not\cong\rho^* \ \text{不存在 } B(x,y). \\ -1 & \rho\cong\rho^* \ \exists \text{反对称 } B(x,y) \end{cases}$$

定理：(ρ, V)是复不可约表示，$S(\rho) = 1, 0$ 或 -1.

实数型 (1). $S(\rho)=1$. 存在非退化 G-不变对称双线性函数。 V 的实形式 V_0, $Hom_G(V_0, V_0) = \mathbb{R}$

复数型 (2). $S(\rho)=0$. 不存在非退化 G-不变双线性函数 $V_{\mathbb{R}}$ 是不可约实表示. $Hom_G(V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}) = \mathbb{C}$.

四元数型 (3) $S(\rho)=-1$. 存在非退化 G-不变反对称双线性函数 $V_{\mathbb{R}}$ 是不可约实表示。$Hom_G(V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}) = \mathbb{H}$

命题：(ρ, V) 可以在 $\mathbb{R}$ 实现 $\Leftrightarrow S(\rho)=1$.

例1. D_4 2维复不可约表示 ρ

	$\{1\}$	$\{b^2\}$	$\{b, b^3\}$	$\{a, ab^2\}$	$\{ab, ab^3\}$
ρ	2	-2	0	0	0

$S(\rho)=1$. ρ 能在 $\mathbb{R}$ 上实现.

例. Q_8 2维复不可约表示 ρ

	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{\pm i\}$	$\{\pm j\}$	$\{\pm k\}$
ρ	2	-2	0	0	0

$S(\rho)=-1$. ρ 不能在 $\mathbb{R}$ 上实现.