诱导表示.

设 H 是 G 的子群. (ρ, V) 是 G 的表示. $\mathrm{Res}_H^G \rho = \rho|_H : H \to GL(V)$ 是 H 的表示

设 $W \subseteq V$ 的 H-不变子空间, 记 $\theta = \rho|_H$. (θ, W) 是 H 的表示 $\theta: H \to GL(W)$

取 $g \in G$, $gW := \rho(g)W$ 也是 V 的子空间.(不一定是 H-不变子空间). $gW = g_1 W$. 即 gW 只依赖于 g 所在左陪集 gH

若 $g_1 = gh$ 则 $g_1 W = ghW \subseteq gW$ 反之 $g = g_1 h^{-1} \Rightarrow gW \subseteq g_1 W$. $\Rightarrow$.

记 $W_{\bar g} = gW$, $\bar g = gH$ 是 g 所在的左陪集. 则 $\sum\limits_{\bar g \in G/H} W_{\bar g}$ 是 V 的 G-不变子空间.(G 的表示).

定义: 如果 $V = \bigoplus\limits_{\bar g \in G/H} W_{\bar g}$. 那么 (ρ, V) 称为 (θ, W) 的诱导表示. 记为 $\rho = \mathrm{Ind}_H^G \theta$, $\mathrm{Ind}\uparrow\theta$, $\mathrm{Ind}\theta$

$V = \mathrm{Ind}_H^G W$, $\mathrm{Ind}\uparrow W$, $\mathrm{Ind} W$.

G/H 不是商群. 只是左陪集的集合. $\{g_1 H, g_2 H, \cdots, g_m H\}$.

例. W是H的1维平凡表示. $W_{\bar{g}_i}$是1维线性空间. $gW_{\bar{g}_i}=W_{\overline{gg_i}}$是$\{\bar{g}_1,\cdots,\bar{g}_m\}$的置换.

$\mathrm{Ind}_H^G W$是集合G/H上的置换表示.

例: R_G、R_H分别是G、H的左正则表示. $V=\mathbb{F}G$, $W=\mathbb{F}H$. $\mathbb{F}$是基域.

$W_g=g\cdot\mathbb{F}H$的基是左陪集$\{gh_1,gh_2,\cdots,gh_k\}=gH$. $H=\{h_1,\cdots,h_k\}$.

$\bigoplus W_g$的基是$\bigcup\limits_{g\in G/H} gH=G$. $\Rightarrow \mathrm{Ind}_H^G\mathbb{F}H=\mathbb{F}G$

以上定义是个外在定义，下面只从 H 的表示 (θ, W) 出发来定义 G 的表示 $\mathrm{Ind}_H^G\theta$.

考虑张量积 $\mathbb{F}G\otimes W = \{\sum_i g_i\otimes w_i \mid g_i\in G,\ w_i\in W\}$.

G的作用：$g(\sum_i g_i\otimes w_i) = \sum_i gg_i\otimes w_i$

希望 $g\cdot W = \{g\otimes w \mid w\in W\}$ 只依赖于 g 的左陪集 gH. 若 $g_1 = gh$. $g_1W = gW \Rightarrow$ $gh\otimes w$ 与 $g\otimes hw$ 应看作为同一向量.

定义. $\mathrm{Ind}_H^G W = \mathbb{F}G\otimes W/\langle gh\otimes w - g\otimes hw\rangle := \mathbb{F}G\otimes_{\mathbb{F}H} W$ （代数 A 的右模 M，和 A 的左模 N 作张量积 $M\otimes_A N = M\otimes N/\langle ma\otimes n - m\otimes an\rangle$）

$\mathrm{Ind}_H^G W = \bigoplus_{g\in G/H} g\otimes W$ 的一组基为 $\{g_i\otimes e_j\}$ 其中 g_i 是左陪集 g_iH 的代表元，$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 W 的基.

$\dim \mathrm{Ind}_H^G W = [G:H]\cdot\dim W$

g在 $\mathrm{Ind}_H^G W$ 上的作用为 $g(g_i \otimes w) = g_j \underbrace{(g_j^{-1} g g_i)}_{\in H} \otimes w$ 其中 g_j 是满足 $g_j^{-1} g g_i \in H$. 即 $g g_i \in g_j H$

$= g_j \otimes \underbrace{g_j^{-1} g g_i}_{\in H} w \in g_j \otimes W$ g 把 $g_i \otimes W$ 映到 $g_j \otimes W$

在基 $\{g_i \otimes e_k\}$ 下，$\mathrm{Ind}_H^G \theta(g)$ 的矩阵为，$\theta(h) \in GL(W)$

$$\mathrm{Ind}_H^G \theta(g) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}(g_1^{-1} g g_1), & \hat{\theta}(g_1^{-1} g g_2) & \cdots & \hat{\theta}(g_1^{-1} g g_m) \\ \hat{\theta}(g_2^{-1} g g_1), & \hat{\theta}(g_2^{-1} g g_2) & \cdots & \hat{\theta}(g_2^{-1} g g_m) \\ \vdots & & & \\ \hat{\theta}(g_m^{-1} g g_1) & \hat{\theta}(g_m^{-1} g g_2) & \cdots & \hat{\theta}(g_m^{-1} g g_m) \end{bmatrix}$$

其中 $\hat{\theta}(g_j^{-1} g g_i) = \begin{cases} \theta(g_j^{-1} g g_i) & g_j^{-1} g g_i \in H \\ 0 & g_j^{-1} g g_i \notin H \end{cases}$

例： $G=S_3=\langle a,b \mid a^2=b^3=1,\ a^{-1}ba=b^{-1}\rangle$. $H=\langle b \mid b^3=1\rangle$

H的表示 (θ, W) 为 $W=\mathbb{R}^2$. $\theta(b)=\begin{bmatrix}\cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3}\\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3}\end{bmatrix}$

$\mathrm{Ind}_H^G W = W \oplus \bar{a}W \qquad W=\{1\otimes w \mid w\in W\}.\quad \bar{a}W=\{a\otimes w \mid w\in W\}.$

W的基为 $\{e_1, e_2\}$. $\mathrm{Ind}_H^G W$ 的基为 $\{1\otimes e_1, 1\otimes e_2, a\otimes e_1, a\otimes e_2\}$

$\mathrm{Ind}_H^G W$

$\parallel$

$\mathrm{Ind}\,\theta(a)$:
$$1\otimes e_1 \mapsto a\otimes e_1$$
$$1\otimes e_2 \mapsto a\otimes e_2$$
$$1\otimes e_1 \mapsto a(a\otimes e_1)=a^2\otimes e_1 = 1\otimes e_1$$
$$1\otimes e_2 \mapsto a^2\otimes e_2 = 1\otimes e_1$$

$$\mathrm{Ind}\,\theta(a)=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$\mathrm{Ind}\,\theta(b)$:
$$1\otimes e_1 \mapsto b\otimes e_1 = 1\otimes b e_1 = 1\otimes\theta(b)e_1 = 1\otimes\cos\frac{2\pi}{3}e_1 + 1\otimes\sin\frac{2\pi}{3}e_1$$
$$1\otimes e_2 \mapsto b\otimes e_2 = 1\otimes\theta(b)e_2.$$
$$a\otimes e_1 \mapsto ba\otimes e_1 = ab^{-1}\otimes e_1 = a\otimes b^{-1}e_1 = a\otimes\cos\frac{-2\pi}{3}e_1 + a\otimes\sin\frac{-2\pi}{3}e_2 = \cos\frac{-2\pi}{3}\,a\otimes e_1 + \sin\frac{-2\pi}{3}\,a\otimes e_2$$
$$a\otimes e_2 \mapsto ba\otimes e_2 = a\otimes b^{-1}e_2$$

$$\mathrm{Ind}\,\theta(b)=\begin{bmatrix}[\theta(b)] & \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} & [\theta(b^{-1})]\end{bmatrix}$$

ρ_3是S_3的2维不可约表示特征标.

$\mathrm{tr}\,\mathrm{Ind}\,\theta(a)=0, \quad \mathrm{tr}\,\mathrm{Ind}\,\theta(b)=\mathrm{tr}\,\theta(b)+\mathrm{tr}(\theta(b^{-1}))=-2 \Rightarrow \mathrm{Ind}\,\theta = 2\rho_3$

设 φ 是 θ 的特征标、 $\mathrm{Ind}\varphi$ 是诱导表示 $\mathrm{Ind}\theta$ 的特征标、

$$\mathrm{Ind}\varphi(g) = \sum_{i=1}^{m} tr\,\hat{\theta}(g_i g g_i) = \sum_{i=1}^{m} \hat{\varphi}(g_i^{-1} g g_i)$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{t\in G} \hat{\varphi}(t^{-1} g t) \qquad |g_i H| = |H|$$

$$\hat{\varphi}(s) = tr\,\hat{\theta}(s) \qquad s\in g$$

$$\hat{\varphi}(s) = \begin{cases} \varphi(s) & s\in H \\ 0 & s\notin H \end{cases}$$ 称 φ 在 G 上的延拓

练习：φ 是 H 上的类函数，$\hat{\varphi}$ 是 G 上的类函数.

例：$G = \{x, y \mid x^3=1,\ y^7=1,\ x^{-1}yx = y^3\}$. $H = \langle y \mid y^7 = 1\rangle$， H 的 1 维表示 θ： $\theta(y) = \eta$ $\quad \eta^7=1,\ \eta = e^{\frac{2\pi i}{7}}$

G/H 的代表元 $\{1, x, x^2\}$，G 的共轭类 $\{1\}$, $\{y, y^2, y^4\}$, $\{y^3, y^5, y^6\}$, $\{xy^i\}_{i=0,\cdots,6}$, $\{x^2y^i\}_{i=0,\cdots,6}$.

$3 \qquad \eta+\eta^3+\eta^4 \qquad \eta^3+\eta^6+\eta^5 \qquad 0 \qquad 0$

$$\mathrm{Ind}\theta(1) = \sum_{s\in\{1,x,x^2\}} \hat{\theta}(s^{-1}\cdot 1\cdot s) = 1+1+1 = 3$$

$(\mathrm{Ind}\theta, \mathrm{Ind}\theta)_G = 1 \Rightarrow \mathrm{Ind}\theta$ 是 G 的不可约表示.

$$\mathrm{Ind}\theta(y) = \sum_{s\in\{1,x,x^2\}} \hat{\theta}(s^{-1}ys) = \hat{\theta}(y) + \hat{\theta}(y^3) + \hat{\theta}(y^4) = \eta+\eta^3+\eta^4$$

$$\mathrm{Ind}\theta(y^3) = \eta^3+\eta^6+\eta^5, \quad \mathrm{Ind}\theta(x) = \mathrm{Ind}\theta(x^2) = 0$$

Frobenius互反律：设φ, χ分别是H, G上的类函数，则 $(\mathrm{Ind}\varphi, \chi)_G = (\varphi, \mathrm{Res}\chi)_H$

证：$(\mathrm{Ind}\varphi, \chi)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathrm{Ind}\varphi(g^{-1})\chi(g) = \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{g,t\in G}\hat{\varphi}(t^{-1}g^{-1}t)\chi(g)$

$t^{-1}g^{-1}t = s^{-1}$

$g = tst^{-1}$

$= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{s,t\in G}\hat{\varphi}(s^{-1})\chi(tst^{-1}) = \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{s,t\in G}\hat{\varphi}(s^{-1})\chi(s)$

$= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{s\in G}\hat{\varphi}(s^{-1})\chi(s)|G| = \frac{1}{|H|}\sum_{s\in G}\hat{\varphi}(s^{-1})\chi(s)$

$= \frac{1}{|H|}\sum_{s\in H}\varphi(s^{-1})\chi(s) = \frac{1}{|H|}\sum_{s\in H}\varphi(s^{-1})\,\mathrm{Res}\chi(s) = (\varphi, \mathrm{Res}\chi)_H$

设φ是H的表示(θ, W)的特征标，χ是G的表示(ρ, V)的特征标，则

$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}W, V) \cong \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}V)$. $\quad (\dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = (\chi_1, \chi_2))$

Rep(H)是H的表示范畴。Rep(G)是G的表示范畴。

Rep(H) = {H的表示}. Rep(G) = {G的表示}

$\mathrm{Rep}\,G \underset{\mathrm{Ind}}{\overset{\mathrm{Res}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Rep}\,H$ Res和Ind是互为伴随的函子

例: $G = S_3$. $H = \langle b \mid b^3 = 1 \rangle$. $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

G	1	$\{a, ab, ab^2\}$.	$\{b, b^2\}$.
V_1	1	1	1
V_2	1	-1	1
V_3	2	0	-1

H:	1	b	b^2
W_1	1	1	1
W_2	1	ω	ω^2
W_3	1	ω^2	ω.

H	1	b	b^2
$\mathrm{Res}V_1$	1	1	1
$\mathrm{Res}V_2$	1	1	1
$\mathrm{Res}V_3$	2	-1	-1

$$\mathrm{Res}V_1 = (\mathrm{Res}V_1, W_1)_H W_1 \oplus (\mathrm{Res}V_1, W_2)_H W_2 \oplus (\mathrm{Res}V_1, W_3)_H W_3 = W_1,$$ $\mathrm{Res}V_2 = W_1$

$$\mathrm{Res}V_3 = (\mathrm{Res}V_3, W_1)_H W_1 \oplus (\mathrm{Res}V_3, W_2)_H W_2 \oplus (\mathrm{Res}V_3, W_3)_H W_3 = 0 \oplus W_2 \oplus W_3$$

$$\mathrm{Ind}W_1 = (\mathrm{Ind}W_1, V_1)_G V_1 \oplus (\mathrm{Ind}W_1, V_2)_G V_2 \oplus (\mathrm{Ind}W_1, V_3)_G V_3$$
$$= (W_1, \mathrm{Res}V_1)_H V_1 \oplus (W_1, \mathrm{Res}V_2)_H V_2 \oplus (W_1, \mathrm{Res}V_3)_H V_3 = V_1 \oplus V_2 \oplus 0$$

$\mathrm{Ind}W_2 = 0 \oplus 0 \oplus V_3$. $\mathrm{Ind}W_3 = 0 \oplus 0 \oplus V_3$.

$\mathrm{Ind}_H^G W$ 何时是不可约的. 就是要将 $(\underbrace{\mathrm{Ind}_H^G W, \mathrm{Ind}_H^G W}_{\text{特征标}})_G = (W, \mathrm{Res}(\mathrm{Ind} W))_H$

研究 $\mathrm{Res}(\mathrm{Ind} W)$. 首先. $V = \mathrm{Ind}_H^G W = g_1 W \oplus \cdots \oplus g_m W$. g_i 是左陪集的代表元

$g_i W$ 不一定是 H 的不变子空间. 但 $\underline{\sum_{h \in H} h g_i W}$ 是 H-不变子空间. 具有 $\underset{\overset{\cap}{G}}{Ht}HW$ 的形式.

$HtH = \{h_1 t h_2 \mid h_1 \in H, h_2 \in H\}$ 是 t 的双陪集. G 是双陪集的不交并.

G 的双陪集 $Ht_1H, Ht_2H, \cdots Ht_rH$ 的集合记为 ${}_H\backslash G/H$

令. $V_t = \sum_{x \in HtH} xW$, 则. $\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G W) = \mathrm{Res}\, V = \bigoplus_{t \in {}_H\backslash G/H} V_t$

(是某些 $g_i W$ 的直和)

$$V_t = \sum_{x\in HtH} xW = \sum_{h\in H} htW$$

$$htW = tW \iff ht = th_1 \iff h = th_1t^{-1} \in tHt^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$H_t = tHt^{-1}\cap H$ 是 H 的子群. 且. tW 是 H_t 的不变子空间 (H_t 的表示).

$$V_t = \sum_{h\in H} htW = \bigoplus_{h\in H/H_t} htW \Rightarrow V_t = \mathrm{Ind}_{H_t}^{H} tW$$

H_t 作用在 tW 可以被拉回到 W 上:

$$\begin{tikzcd} tW \arrow[r, "x\in H_t"] & tW \\ W \arrow[u, "t"] \arrow[r, "t^{-1}xt"'] & W \arrow[u, "t"'] \end{tikzcd}$$

即定义 $\theta_t : H_t \to GL(W)$

$$x \longmapsto \theta_t(x) = t^{-1}xt$$

$V_t \cong \mathrm{Ind}_{H_t}^{H}\theta_t$ 于是. $\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G H) = \bigoplus_{t\in H\backslash G/H} \mathrm{Ind}_{H_t}^{H}\theta_t$

$$(\mathrm{Ind}_H^G W, \mathrm{Ind}_H^G W)_G = (W, \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G W))_H = (W, \bigoplus_{t_i \in {}_H\backslash G/H} \mathrm{Ind}_{H_{t_i}}^H \theta_{t_i})_H$$

$$= \sum_{\bar{t}_i \in {}_H\backslash G/H} (W, \mathrm{Ind}_{H_{t_i}}^H \theta_{t_i})_H = \sum_{\bar{t}_i \in H\backslash G/H} (\mathrm{Res}_{H_{t_i}}^H W, \theta_{t_i})_{H_{t_i}}$$

$$= (\theta, \theta)_H + \sum_{t_i \notin H} (\mathrm{Res}_{H_{t_i}}^H W, \theta_{t_i})_{H_{t_i}}$$

$t_1 \in H$,

$Ht_1H = H$

$\theta_{t_1} = \theta$

$\uparrow$

$\mathbb{N}$

定理(Mackey) $\mathrm{Ind}_H^G \theta$ 不可约 $\Longleftrightarrow$ θ 不可约. 且, $(\mathrm{Res}_{H_{t_i}}^H W, \theta_{t_i}) = 0$. $t_i \notin H$

推论. H 是 G 的正规子群., $\mathrm{Ind}_H^G \theta$ 不可约 $\Leftrightarrow$ θ 不可约且. $\forall t \notin H$, θ_t 与 θ 不同构.

$\forall t$, $H_t = H$