第六章 对称群与交错群的表示.

S_n 的表示.

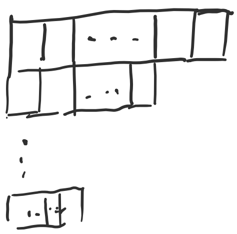
S_n 的共轭类. 与 n 的拆分一一对应　　　$\sigma(a\cdots b)\sigma^{-1}=(\sigma(a)\cdots\sigma(b))$

$\{\underbrace{(\cdots)}_{\lambda_1}\underbrace{(\cdots)}_{\lambda_2}\cdots\underbrace{(\cdots)}_{\lambda_k}\}$　　$n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k$　　$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_k$

$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$ 称为 n 的一个划分

不相交轮换的乘积.

与Young图一一对应



λ_1 个格子

λ_2 个格子

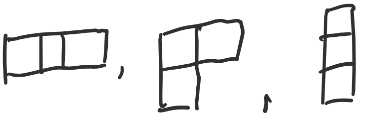
$\vdots$

λ_k 个格子

把 $1,2,\cdots,n$ 不重复地填入一个Young图的格子中. 得到属于 λ 的一个Young表.

同一个Young图, 有 $n!$ 个Young表.

例. 3的划分有 (3), $(2,1)$, $(1,1,1)$

对应的Young图: 

S_3 的对应于 $(2,1)$ 的Young表有

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}$$

S_n 自然地作用在Young表 T 上: gT 是 T 的数字经过置换 g 后得到Young表.

$$(321)\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$$

Young图与S_n的共轭类一一对应，所以我们希望通过Young图构造S_n的不可约表示。为此取定一个对应的Young表T，通过S_n在T上的作用来找群代数$\mathbb{C}S_n$的本原幂等元。

定义：设T是Young表，$R(T)$是保持T中各行数字整体不变的置换全体（行变换）

$C(T)$是保持T中各列数字整体不变的置换全体。（列变换）

引理：(1) $R(T)$与$C(T)$是S_n的子群，且$R(T)\cap C(T)=\{(1)\}$

(2) 对$p_1,p_2\in R(T)$，$q_1,q_2\in C(T)$，$p_1q_1=p_2q_2 \Longleftrightarrow p_1=p_2,\ q_1=q_2$

($p_2^{-1}p_1=q_2q_1^{-1}\in R(T)\cap C(T)$)

(3) $R(gT)=gR(T)g^{-1}$，$C(gT)=gC(T)g^{-1}$ （直接验证）.

Young对称化子：$e(T)=\left(\sum\limits_{g\in R(T)} g\right)\left(\sum\limits_{g\in C(T)}\mathrm{sgn}(g)\,g\right)$

以下我们主要证明$e(T)$的某个常数倍就是本原幂等元.

例. S_3：T_1：$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}$ $\qquad e(T_1)=\sum\limits_{g\in S_3} g$.

T_2：$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}$ $\qquad e(T_2)=\sum\limits_{g\in S_3}\mathrm{sgn}(g)\,g$

T_3：$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$ $\qquad e(T_3)=\big((1)+(12)\big)\big((1)-(13)\big)$

$$=(1)+(12)-(13)-(132)$$

直接验证：$e(T_3)e(T_3)=3\,e(T_3)$

$e(T_3)$ 生成的左理想为 $\mathbb{C}S_3 \cdot e(T_3)$: $e_3 = e(T_3)$

$(12)e_3 = e_3 = (1)+(12)-(13)-(132)$

$(13)e_3 = (13)+(132)-(1)-(23)$

$(23)e_3 = (23)+(132)-(123)-(12)$

$\left.\right\}$ $(12)e_3+(13)e_3+(23)e_3=0$

$(23)e_3 = -e_3-(13)e_3$

$(123)e_3 = (31)(12)e_3 = (13)e_3$

$(132)e_3 = (32)(12)e_3 = (23)e_3 = e_3-(13)e_3$

$\mathbb{C}S_3 \cdot e_3 = \mathrm{span}\{e_3, (13)e_3\}$ 是2维不可约表示、

$$\begin{array}{cccccc} (1) & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

引理：$\forall p\in R(T), q\in C(T)$, $pe(T)q = \mathrm{sgn}(q)\, e(T)$. (显然)

反之. 引理：若 $x\in\mathbb{C}S_n$ 满足 $pxq=\mathrm{sgn}(q)x$ $\forall p\in R(T), q\in C(T)$

则. 存在 $c\in\mathbb{C}$, 使得. $x=ce(T)$.

证明：设这样的 x 为 $x=\sum_{g\in S_n} a_g g$. $a_g\in\mathbb{C}$. $\forall p\in R(T), q\in C(T)$

$$x = \mathrm{sgn}(q)pxq = \mathrm{sgn}(q)\sum_{g\in S_n} a_g\, pgq \Rightarrow a_{pgq} = \mathrm{sgn}(q)a_g$$

特别地、 $a_{pq}=\mathrm{sgn}(q)a_1$, 从而 $x = a_1\Big(\sum_{\substack{p\in R(T)\\ q\in C(T)}} \mathrm{sgn}(q)pq\Big) + \sum_{g\notin R(T)C(T)} a_g g$

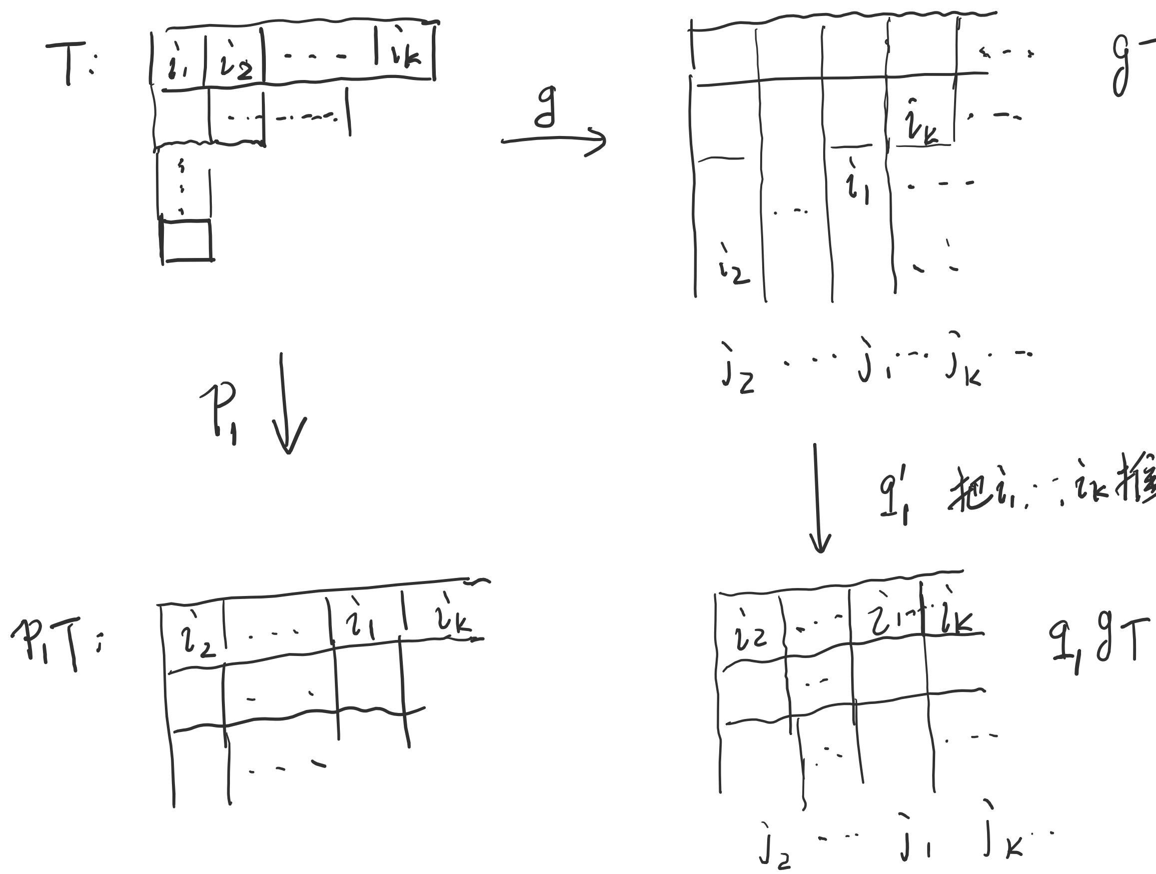
下面要证明 对 $g\notin R(T)C(T)$, $a_g=0$

引理. $g \notin R(T)C(T) \Rightarrow$ 存在 i,j 使得 $(ij) \in R(T) \cap C(gT)$.

即: i,j 在T的同一行中, 也在gT的同一列中.

证明: 假设不存在这样的 i,j. 也就是T中同一行的数字在gT的不同列中

设T的第一行为 $i_1, i_2, \cdots, i_k$, 分别在gT的第 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列中.



取 $p_1 \in R(T)$. 和 $q_1 \in C(gT)$. 使得 p_1T 与 $q_1' gT$ 有相同的第一行.

p_1T 的第二行数字与T的第二行相同, 分布在 $q_1' gT$ 的不同列中. (因为 q_1' 没改变 gT 数字所在列).

从而可取 $p_2 \in R(T)$ 和 $q_2' \in C(gT)$ 使得 $p_2 p_1 T$ 与 $q_2' q_1' gT$ 有相同的第二行。

以此类推. 可得 $p \in R(T)$ 与 $q' \in C(gT)$ 使得 pT 与 $q' gT$ 完全相同.

于是 $p = q'g$. 由 $C(gT) = gC(T)g^{-1}$ 知 $\exists q \in C(T)$, $p = \underbrace{(gqg^{-1})}_{q'} g \Rightarrow g = pq^{-1} \in R(T)C(T)$

由以上引理可知，对 $g \notin R(T)C(T)$，存在对换 $t=(ij) \in R(T) \cap C(gT)$

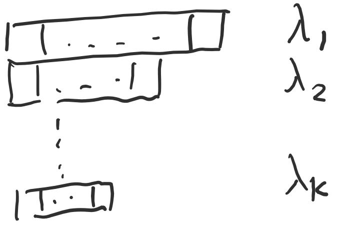
$C(gT) = gC(T)g^{-1} \Rightarrow g^{-1}tg \in C(T)$ 也是一个对换 $\Rightarrow \mathrm{sgn}(g^{-1}tg) = -1$

$$\underset{\substack{\cap \\ R(T)}}{g = t} \, g \underset{\substack{\cap \\ C(T)}}{(g^{-1}tg)} \Rightarrow a_g = a_{tg(g^{-1}tg)} = \mathrm{sgn}(g^{-1}tg)\, a_g = -a_g \Rightarrow a_g = 0$$

S_n 的全不可约表示 $\longleftrightarrow$ 群代数 $\mathbb{C}S_n$ 的本原幂等元

n 的划分 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$. $\lambda_1+\cdots+\lambda_k=n$. $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_k$

Young 图：



$\xrightarrow{\text{把 } 1,\cdots,n \text{ 填进格子}}$ Young 表.

给定 Young 表 T. $R(T)=\{$行变换$\}$, $C(T)=\{$列变换$\}$.

Young 对称化子 $e(T)=\left(\sum_{p\in R(T)} p\right)\left(\sum_{q\in C(T)} \mathrm{sgn}(q)\,q\right)$

引理 1. $pe(T)q=\mathrm{sgn}(q)e(T)$ $\quad\forall p\in R(T),\ q\in C(T)$.

2. 若 $x\in\mathbb{C}S_n$ 满足 $pxq=\mathrm{sgn}(q)x$ $\quad\forall p\in R(T),\ q\in C(T)$ 则 $x=\lambda_x e(T)$, $\lambda_x\in\mathbb{C}$

推论： 1. $x=e(T)^2$. 则 $e(T)^2=ce(T)$, $c\in\mathbb{C}$.

$pe(T)^2q=pe(T)\,e(T)q=e(T)\cdot\mathrm{sgn}(q)e(T)=\mathrm{sgn}(q)\,e(T)^2$

2. $\forall y\in\mathbb{C}S_n$ 则 $e(T)ye(T)=\mu_y e(T)$

$p\,e(T)ye(T)q=\mathrm{sgn}(q)\,e(T)ye(T)$.

$\Rightarrow \dim e(T)\mathbb{C}S_n e(T)=1$

定理. $\frac{1}{c}e(T)$ 是本原幂等元, $\mathbb{C}S_n e(T)$ 是极小左理想 (S_n 的不可约表示).

命题. $c = \dfrac{n!}{\dim \mathbb{C}S_n e(T)}$

证: 考虑线性变换 $\varphi: \mathbb{C}S_n \longrightarrow \mathbb{C}S_n$ $\quad Im\varphi = \mathbb{C}S_n e(T)$.

$x \longmapsto xe(T)$

在适当的基下, 投影的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

右乘 $\frac{1}{c}e(T)$ 是从 $\mathbb{C}S_n$ 到 $\mathbb{C}S_n e(T)$ 的投影. $tr(\text{右乘}\frac{1}{c}e(T)) = \dim(\mathbb{C}S_n e(T))$.

$$tr\,\varphi = c\, tr(\text{右乘}\tfrac{1}{c}e(T)) = c\cdot \dim(\mathbb{C}S_n e(T))$$

另一方面. $\forall g \in S_n$, $\quad \varphi(g) = ge(T) = g(\sum_p p)(\sum_q sgn(q)q) = g(\underline{(1)} + \cdots\cdots) = g + \cdots\cdots$

$$tr(\varphi) = \sum_{g\in S_n} 1 = n! \quad \Rightarrow \quad n! = c\cdot\dim(\mathbb{C}S_n e(T))$$

Young表 $T \longrightarrow$ 极小左理想 $\mathbb{C}S_n e(T)$　　问题、同一个Young图（n的划分λ）$\begin{cases} T \to e(T) & \mathbb{C}S_n e(T) \\ & \overset{?}{\cong} \\ T' \to e(T') & \mathbb{C}S_n e(T') \end{cases}$

命题：$\mathbb{C}S_n e(T)$ 与 $\mathbb{C}S_n e(gT)$ 作为 $\mathbb{C}S_n$-模是同构的.

证明. $e(gT) = g\, e(T)\, g^{-1}$.　（ $R(gT) = g R(T) g^{-1}$, $C(gT) = g C(T) g^{-1}$ ）.

$$\varphi: \mathbb{C}S_n e(T) \longrightarrow \mathbb{C}S_n e(gT) \quad \text{是 } \mathbb{C}S_n\text{-模同态}$$
$$x \longmapsto x g^{-1}$$

易证 φ 是同构.（练习）

不同的Young图给出的极小左理想是不同构.

设T与T'是属于n的不同划分（不同Young图）的Young表. 极小左理想不同构 等价于 $e(T')\mathbb{C}S_n e(T) = 0$

$\Longleftrightarrow$ $e(T') g e(T) = 0$ $\forall g \in S_n$ $\Longleftrightarrow$ $e(T') g e(T) g^{-1} = 0$ $\Longleftrightarrow$ $e(T') e(gT) = 0$. $\forall g \in S_n$

引理. 设T, T'分别是属于λ, λ'的Young表, 且 $\lambda > \lambda'$. 则存在i, j, 使得 $(ij) \in R(T) \cap C(T')$

即. i, j在T的同一行, 在T'的同一列.

（证明参见课本）.

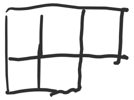
$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2 \cdots)$

$\lambda' = (\lambda_1', \lambda_2' \cdots)$

$\lambda > \lambda' \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_1', \lambda_2 = \lambda_2', \cdots, \lambda_j > \lambda_{j}'$

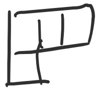
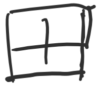
定理. S_n的不可约表示都是 $\mathbb{C}S_n e(T)$. T是Young表, 对应 n的划分 λ.

$$S_\lambda = \mathbb{C}S_n e(T).$$

例: S_5. Young图:  $\lambda=(3,2)$. 对应不可约表示 $S_{(3,2)} = \mathbb{C}S_n e(T)$.

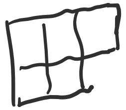
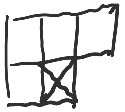
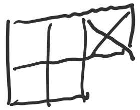
Branching rule: 将S_4看成S_5的子群. S_4是$\{1,2,3,4\}$的置换, S_5是$\{1,2,3,4,5\}$的置换.

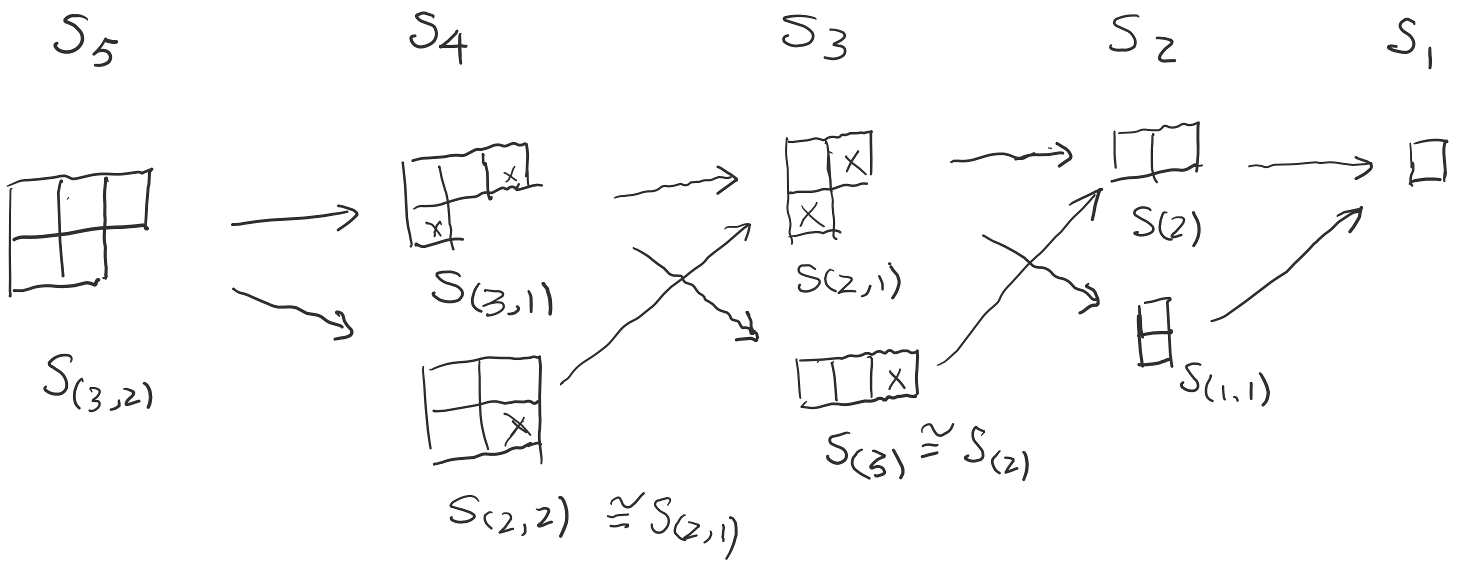
$S_{(3,2)}$作为S_4的表示, 不是不可约的. 有分解 $S_{(3,2)}\big|_{S_4} \cong S_{(3,1)} \oplus S_{(2,2)}$.

S_n不可约表示分解为S_{n-1}的不可约表示直和

GTM129

 去掉右下方的一个角得  , 

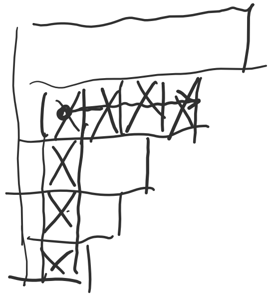


$S_{(3,2)}$ 分解成1维子空间的直和，$\dim S_{(3,2)}$ = 1维子空间的个数 = 上图中从 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \cline{1-2}\end{array}$ 到 □ 的不同路径 = 5

= 标准Young表的数目. 表中的数从左到右递增，从上到下递增.

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\ \hline 4&5 \\ \cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\ \hline 3&5 \\ \cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\ \hline 3&4 \\ \cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\ \hline 2&5 \\ \cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\ \hline 2&4 \\ \cline{1-2}\end{array}$

Young图第i行第j列的钩长 = 这个格的右方和下方组成的钩形图的格子数



$$\dim S_\lambda = \frac{n!}{\prod_{ij} h_{ij}}$$

h_{ij} 是 (i,j) 位置的钩长

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&3&1\\ \hline 2&1 \\ \cline{1-2}\end{array}$

$$\dim S_{(3,2)} = \frac{5!}{4\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 5$$

A_n的表示.（作为S_n到A_n的限制表示）.

设H是有限群G的子群.(ρ, V)是G的表示.$\rho: G \to GL(V)$. $\rho|_H: H \to GL(V)$是H的表示.记为$\mathrm{Res}_H^G \rho$
$\mathrm{Res}_H^G V$
$\mathrm{Res}\rho$.

以下讨论H是指数为2的正规子群的情形. $G = H \cup gH$. $g \notin H \Rightarrow g^2 \in H$

(ρ, V)是G的不可约表示.$\mathrm{Res}\rho$可能是H的可约表示.设W是V中H的不可约表示. gW也是H-不变子空间.

$h \in H$. $hgW = gh_1W \subseteq gW$

$hg \in gH$ $h_1 \in H$

$\Rightarrow W = gW$ 或 $W \cap gW = \{0\}$.（W是不可约H表示）.

$W + gW$是V的G-不变子空间（$g(W+gW) = gW + g^2W = gW + W$）$\Rightarrow V = W \oplus gW$（$V$是不可约$G$表示）.

$W' = gW$称为W的共轭表示.

计算特征标.设χ是ρ的特征标: $1 = (\chi, \chi)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi(g)}\chi(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in H}\overline{\chi(h)}\chi(h) + \frac{1}{|G|}\sum_{g\notin H}\overline{\chi(g)}\chi(g) = \frac{|H|}{|G|}(\mathrm{Res}\rho, \mathrm{Res}\rho)_H + K$

其中$K = \frac{1}{|G|}\sum_{g\notin H}\overline{\chi(g)}\chi(g) \geq 0$ $\Rightarrow \frac{|H|}{|G|}(\mathrm{Res}\rho, \mathrm{Res}\rho)_H \leq 1 \Rightarrow (\mathrm{Res}\rho, \mathrm{Res}\rho)_H \leq 2 = \frac{|G|}{|H|}$

由于$(\mathrm{Res}\rho, \mathrm{Res}\rho)_H \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow (\mathrm{Res}\rho, \mathrm{Res}\rho)_H = 1$ 或 2.

$\mathrm{Res}\rho = \oplus m_i W_i$ $(\mathrm{Res}\rho, \mathrm{Res}\rho)_N = \sum_i m_i^2$

$(\mathrm{Res}\rho, \mathrm{Res}\rho)_H = 1 \iff$ $\mathrm{Res}\rho$ 是 H 的复不可约表示

$(\mathrm{Res}\rho, \mathrm{Res}\rho)_H = 2 \iff$ $\mathrm{Res}\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, ρ_1, ρ_2 是 H 的不等价不可约表示.

$$\iff \sum_{g\notin H} \overline{\chi(g)}\chi(g) = 0 \iff \chi(g)=0,\ \forall g\notin H$$

$[G:H]=2$. G/H 的非平凡1维表示诱导了 G 的符号表示. $\mathrm{sgn}(g) = \begin{cases} 1 & g\in H \\ -1 & g\notin H \end{cases}$

V 是 G 的复不可约表示. $V' = V\otimes \mathrm{sgn}$ 也是 G 的不可约表示. 二者的特征标 在 $g\in H$ 时取值相同. 在 $g\notin H$ 时取值互为相反数

$\mathrm{Res}\rho = \mathrm{Res}\rho'$

$(\mathrm{Res}\rho, \mathrm{Res}\rho)_H = 2 \iff \chi(g)=0 \quad \forall g\notin H \iff V\cong V'$

定理. (ρ, V) 是 G 的复不可约表示, $[G:H]=2$.

(1) $V\ncong V'$. $\mathrm{Res}\rho$ 是 H 的不可约表示. $\exists g\notin H$, $\chi(g)\neq 0$.

(2). $V\cong V'$. $\mathrm{Res}\rho \cong \rho_1\oplus\rho_2$. ρ_1, ρ_2 是 H 的不同构不可约表示 $\forall g\notin H$, $\chi(g)=0$

维数相同.

例. S_5 的特征标表:

	(1)	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)	(123)(45)	(12345)
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1	-1	1
χ_3	4	-2	1	0	0	-1	-1
χ_4	4	-2	1	0	0	1	-1
χ_5	5	1	-1	1	-1	1	0
χ_6	5	-1	-1	1	1	-1	0
χ_7	6	0	0	-2	0	0	1

A_5 的共轭类. $\{(1)\}$, $\{(123)\cdots\}$ $\{(12)(34),\cdots\}$ $\{(12345),\cdots\}$ $\{(21345),\cdots\}$.

$i=1,2,3,4,5,6$. $\chi_i((12))\neq 0 \Rightarrow \chi_i|_{A_5}$ 是 A_5 的不可约表示特征标.

$\chi_1|_{A_5}=\chi_2|_{A_5}$, $\chi_3|_{A_5}=\chi_4|_{A_5}$. $\chi_5|_{A_5}=\chi_6|_{A_5} \Rightarrow$ 得到 A_5 的3个不可约表示. $\psi_1=\chi_1|_{A_5}$, $\psi_2=\chi_3|_{A_5}$, $\psi_3=\chi_5|_{A_5}$

维数分别是. 1, 4, 5

$\forall g \notin A_5$, $\chi_7(g)=0 \Rightarrow \chi_7|_{A_5} = \psi_4+\psi_5$, ψ_4, ψ_5 分别是 3 维不可约表示特征标.

	(1)	(123)	(12)(34)	(12345)	(21345)
	1	20	15	20	20
ψ_1	1	1	1	1	1
ψ_2	4	1	0	-1	-1
ψ_3	5	-1	1	0	0
ψ_4	3	α_2	α_3	α_4	α_5
ψ_5	3	β_2	β_3	β_4	β_5

A_5 中的元素,总是与自身的逆是共轭的 $\left((15)(24)(12345)(15)(24)=(54321)\right)$. $\psi(h)=\psi(h^{-1}) \Rightarrow \psi(h)=\overline{\psi(h)} \Rightarrow \psi(h)\in\mathbb{R}$.

$\chi_7|_{A_5}=\psi_4+\psi_5 \Rightarrow \alpha_2+\beta_2=\chi_7((123))=0$. $\alpha_3+\beta_3=-2$. $\alpha_4+\beta_4=\alpha_5+\beta_5=1$.

第二正交关系. $\sum_{i=1}^{h}\overline{\chi_i(g)}\chi_i(g)=\frac{|G|}{|C_g|}$. g的共轭类大小.

$\alpha_2^2+\beta_2^2+3=\frac{60}{20}$

$\alpha_3^2+\beta_3^2+2=\frac{60}{15}$

$\alpha_4^2+\beta_4^2+2=\frac{60}{20}$

$\alpha_5^2+\beta_5^2+2=\frac{60}{20}$

$\Rightarrow$

$\alpha_2=\beta_2=0$

$\alpha_3=\beta_3=-1$

$\alpha_4=\frac{1+\sqrt5}{2}$ $\beta_4=\frac{1-\sqrt5}{2}$

$\alpha_5=\frac{1-\sqrt5}{2}$ $\beta_5=\frac{1+\sqrt5}{2}$