第5章 群代数

设(ρ, V)是群G的表示，则$\rho(G)$是$GL(V)$的子群。

按$GL(V)$中的加法和数乘，$\rho(G)$可生成一个环$\mathbb{F}G_\rho$

$$\mathbb{F}G_\rho = \left\{ \sum_{g\in G} a_g \rho(g) \;\middle|\; a_g \in \mathbb{F} \right\}.$$

$\mathbb{F}G_\rho$是$End(V)$的线性子空间。 $\mathbb{F}G_\rho$和$End(V)$都是结合代数。

定义：设A是数域$\mathbb{F}$上的线性空间，如果A上有二元运算满足双线性，$\forall a, b, c \in A$，$k, l \in \mathbb{F}$，

$$a(kb+lc) = k(ab) + l(ac), \quad (kb+lc)a = k(ba) + l(ca)$$

则称A是一个$\mathbb{F}$-代数

如果这个二元运算满足结合律，即$(ab)c = a(bc)$

则称A是一个结合代数

约定，我们讨论的代数都有幺元(乘法单位元)，记为1.

例. 非结合代数

李代数，乘法ab记为$[a,b]$，满足

$$[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0$$

结合代数 = 线性空间 + 环

加法　结合律，交换律，
数乘　分配律，
乘法　结合律

例：$A=\mathrm{End}(V)$，V是线性空间。

$(f_1+f_2)(v)=f(v)+\ (v)$　　$(kf)(v)=k(f(v))$

$(f_1\cdot f_2)(v)=f_1(f_2(v))$。　幺元 $\mathbb{1}=\mathrm{id}_V$

例、$A=\mathbb{F}^{n\times n}$。　$\mathbb{F}$上的 $n\times n$ 矩阵。

例　多项式代数 $\mathbb{F}[x_1,\cdots,x_n]$，$\mathbb{F}[x]$

例．群代数 $\mathbb{F}G$。

设G是有限群。　$\mathbb{F}G=\{\sum_{g\in G}a_g g \mid a_g\in\mathbb{F}\}$。

$$\left(\sum_{g\in G}a_g g\right)\left(\sum_{h\in G}b_h h\right)=\sum_{g,h\in G}a_g b_h gh=\sum_{s\in G}\left(\sum_{gh=s}a_g b_h\right)s$$

结合代数作为环，有子代数和理想的概念。

A 是代数。

A 的子空间 B 称为子代数，如果 B 对乘法封闭。

子代数 I 称为 A 的左理想，如果 $\forall a\in A$，$aI\subseteq I$ $(AI\subseteq I)$

右理想。 $Ia\subseteq I$ $(IA\subseteq I)$.

双边理想（简称理想）如果 I 既是左理想，又是右理想。

$\forall a,b\in A$，$aI\subseteq I$ $Ib\subseteq I$

$\{0\}$ 和 A 称为 A 的平凡理想。

A 称为单代数，如果 A 没有非平凡理想，且 $A^2\neq\{0\}$

$\overset{\shortparallel}{\mathrm{span}}\{ab\mid a,b\in A\}$

同态：

A,A' 是代数，称 $\varphi\in Hom(A,A')$ 为代数同态，如果

$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$，$\forall a,b\in A$.

如果 A,A' 有幺元，要求 $\varphi(1_A)=1_{A'}$.

φ 是双射，φ 称为同构。

性质：$\ker\varphi:=\varphi^{-1}(0)$ 是 A 的理想，$\mathrm{Im}\varphi$ 是 A' 的子代数。

$$A/\ker\varphi\cong \mathrm{Im}\varphi$$

代数的模(表示)

A是代数，A-左模V是$\mathbb{F}$上的线性空间，有运算$A\times V\to V$满足：

$$a(v+w)=av+aw \qquad (a+b)v=av+bv$$

$$(ka)v=k(av)=a(kv)$$

$$(ab)v=a(bv) \qquad 1_A(v)=v$$

即，存在代数同态$\rho: A\to \mathrm{End}(V)$，且$1_A\mapsto id_V$，$\rho$称为$A$的表示。

类似地，定义A-右模，要求存在代数反同态$A\to \mathrm{End}(V)$

双模V，则要求$(av)b=a(vb)$ $\quad \forall a,b\in A,\ v\in V$

例：A是A-左模，$\quad L_a(b)=ab \quad \rho: a\mapsto L_a$ 左正则表示。

A-右模 $\quad R_a(b)=ba$

A的子模 $\longleftrightarrow$ A的左理想（L_a的不变子空间）。

命题：有限群G的$\mathbb{F}$-表示与$\mathbb{F}G$的模(表示)存在自然的一一对应。

(ρ,V)是G的表示$\Leftrightarrow$ V是$\mathbb{F}G$的模。

给定$\rho(g)v$ $\Rightarrow$ $\left(\sum a_g g\right)v=\sum a_g\,\rho(g)(v)$

$\rho(g)(v):=g\cdot v \quad \Leftarrow$ 给定$g\cdot v$

有限群 G $\mathbb{F}$表示 (φ, V)	$\mathbb{F}G$-模 V
子表示、商表示	子模、商模
不可约表示，直和，完全可约	不可约模（单模），直和，完全可约模
缠结算子，$Hom_G(V, W)$	模同态 $\varphi(av) = a\cdot\varphi(v)$，$Hom_A(V, W)$ $A=\mathbb{F}G$
Schur 引理	Schur 引理 $Hom_A(V, W) = \begin{cases} 0 & V \not\cong W \\ 体 & V \cong W \end{cases}$ V, W 不可约模

定义：A 是有限维代数，称 A 是半单的 如果 A 的任何有限维模 V 都是完全可约的。

例. 群代数 $\mathbb{C}G$ 是完全可约的。

群代数 $\mathbb{C}G$ 是半单结合代数，即它的有限维表示都是完全可约的。以下我们将群代数的主要结论推广到半单代数，并用幂等元的观点来构造不可约表示。

先研究 A 的左理想和理想的构造。

设 A 是半单代数，I 是 A 的左理想，则存在 A 的左理想 I'

$$A = I \oplus I' \quad (A\text{-模分解}),\quad I \cap I' = \{0\}$$

故存在 $e \in I$，$e' \in I'$　$1 = e + e'$　(唯一分解)

$\forall x \in I$　$\underset{I}{x} = \underset{I}{xe} + \underset{I'}{xe'}$，　$xe \in I$，$xe' \in I' \Rightarrow xe = x,\ xe' = 0$

特别地，$ee = e$，$ee' = 0$。同理，$e'e' = 0$，$e'e = 0$（左乘 $y \in I'$）。

定义：$e \in A$ 称为幂等元，如果 $e^2 = e$，

幂等元 e, e' 称为正交的，如果 $ee' = e'e = 0$

定理：I 是 A 的左理想 $\Leftrightarrow$ $I = Ae$，e 是幂等元。

J 是 A 的右理想 $\Leftrightarrow$ $J = eA$。

注记：e 是 Ae 的右单位，即 $xe = x \quad \forall x \in Ae$

B 是(双边)理想. 则 $B = Ae = fA$. $e.f$ 为幂等元.

$$f = fe = e$$

$\forall x \in A$. $xe, ex \in B$. 则 $xe = e(xe) = (ex)e = ex$

$\Rightarrow e \in Z(A)$. A 的中心. e 称为中心幂等元

定理: B 是 A 的理想. $\Longleftrightarrow$ $B = Ae = eA = eAe$. e 为中心幂等元.

设左理想 $I = Ae$ 可分解为两个左理想 I_1. I_2 的直和. $I = I_1 \oplus I_2$.

$$e = e_1 + e_2 \qquad e_1 \in I_1, \; e_2 \in I_2$$

$x \in I_1$ $\quad x = xe = xe_1 + xe_2 \quad x = xe_1 \quad xe_2 = 0$

$$\underset{I_1}{\underset{\cap}{e_1}} = e_1 e = \underset{I_1}{\underset{\uparrow}{e_1 e_1}} + \underset{I_2}{\underset{\cap}{e_1 e_2}} \Rightarrow e_1 = e_1 e_1 \qquad e_1 e_2 = 0.$$

同理 $e_2 = e_2 e_2$, $e_2 e_1 = 0$

故. $I_1 = Ae_1$, $I_2 = Ae_2$.

$I = I_1 \oplus I_2 \Longleftrightarrow e = e_1 + e_2$. $I_1 = Ae_1$, $I_2 = Ae_2$. $e_1 e_1 = e_1$, $e_2 e_2 = e_2$, $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$

定义. 幂等元 e 称为本原幂等元, 如果 $e \neq 0$, 且 e 不能分解为非零幂等元之和.

注意. 此处不要求分解的幂等元正交.

$$e = e_1 + e_2 \Rightarrow e = e^2 = e_1 + e_2 + e_1 e_2 + e_2 e_1 \Rightarrow e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0$$

$$\Rightarrow e_1 e_2 e_1 + e_2 e_1 = 0 \qquad e_1 e_2 + e_1 e_2 e_1 = 0 \Rightarrow e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0$$

$$\Rightarrow e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$$

左理想 $= Ae$ $\big\}$ e: 幂等元

右理想 $= eA$

(双边)理想 $= Ae = eA = eAe$ e: 中心幂等元

极小左理想 $= Ae$. e: 本原幂等元.

用幂等元表达极小左理想间的关系.

定理: 设 $I=Ae$ 和 $I'=Ae'$ 是 A 的两个极小左理想. 则以下等价:

(1). $I \cong I'$ (A-模同构)

(2). 存在 $a'\in I'$ 使得 $I'=Ia'$

(3). $I'=II'$

(4) $eAe' \neq \{0\}$.

(5). 若 F 是代数闭域, $\dim eAe' = 1$.

证: (1) $\Rightarrow$ (2). $\varphi: I \to I'$ 是 A-模同态. $\forall x\in I$, $\varphi(x)=\varphi(xe)=x\varphi(e)$.

令 $a'=\varphi(e)$. 则 $\mathrm{Im}\varphi \subseteq Ia' \subseteq I'$

φ 为同构 $\Rightarrow Ia'=I'$

(2) $\Rightarrow$ (3). $I' \underset{(2)}{\subseteq} II' \subseteq I' \Rightarrow I'=II'$

I' 为理想.

(3) $\Rightarrow$ (4). $I'=II'=AeAe' \Rightarrow$ eAe' 非零.

(4) $\Rightarrow$ (1). $a'\in eAe'$ 非零. 则 $\{0\}\neq Aa' \subseteq I' \Rightarrow I'=Aa'$ (I' 极小)

$\varphi_{a'}: I \to I'$ 为 A-模同态, $\forall x'\in I'$ 可写成 $x'=ya'$

$x \mapsto xa'$ (乘法结合性). $x'=ya'=yea'e'=ye\,ea'e'=yea'$

$ye\in I$, 所以 $\varphi_{a'}$ 是满的. 从而是同构.

(4) $\Rightarrow$ (5) $\forall x', x'' \in I'$ $\varphi_{x'}$和$\varphi_{x''}$都是同构.

由Schur引理: $\varphi_{x'} = c\,\varphi_{x''} \Rightarrow \varphi_{x'-cx''} = 0$

$\Rightarrow x' = cx'' \Rightarrow \dim eAe' = 1$

(5) $\Rightarrow$ (4) 显然.

由以上证明可知: $\mathrm{Hom}_A(Ae, Ae') \cong eAe'$

$\forall x \in Ae$. $x = xe$ $\varphi(x) = \varphi(xe) = x\varphi(e)$ $a' = \varphi(e) \in Ae'$

$a' = \varphi(e)e'$

$= \varphi(e \cdot e)e' = e\underset{eAe'}{\underbrace{\varphi(e)e'}}$

$a' \in eAe'$, $\varphi_{a'}(x) = xa'$

定理: Ae是极小左理想 $\Leftrightarrow$ e是本原幂等元

除自身外不包含非零左理想

$\Leftrightarrow$ eAe是$\mathbb{F}$上的有限维体.

若$\mathbb{F}$是代数闭域 ($\mathbb{C}$), 则$eAe \cong \mathbb{F}$.

证: $\Rightarrow$. eAe是以e为单位元的代数

若$e = e_1 + e_2$, 则 $e_1 = ee_1e$, $e_2 = ee_2e$, $\in eAe$

$e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. eAe有零因子. 不是体

$\Leftarrow$ Ae是极小左理想、 $\forall exe \in eAe$, $Aexe \subseteq Ae$

$\Rightarrow Aexe = Ae \Rightarrow \exists y \in A$, s.t. $yexe = e$.

故exe可逆. eAe是$\mathbb{F}$上的体.

若$\mathbb{F}$是代数闭域, 则有限维体只有$\mathbb{F}$本身.

推论：设 $I=Ae$ 与 $I'=Ae'$ 是 A 的两个极小左理想，则以下等价.

(1) $I \not\cong I'$ (A-模)

(2) $\forall a' \in I'$, $Ia' = \{0\}$.

(3) $I'I = \{0\}$.

(4) $eAe' = \{0\}$.

例：$G = C_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle$ $A = \mathbb{C}G = \{c_1 + c_2 a + c_3 a^2 \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}\}$

$e_1 = \frac{1}{3}(1+a+a^2)$ $e_2 = \frac{1}{3}(1+\omega^2 a + \omega a^2)$, $e_3 = \frac{1}{3}(1+\omega a + \omega^2 a^2)$

验证 $e_i^2 = e_i$ $e_i e_j = 0$, $i \neq j$ $\omega = e^{2\pi i/3}$

$a e_2 = \omega e_2$ $a e_3 = \omega^2 e_3$

$e_2 A e_2$: $e_2 a e_2 = \omega e_2$
$e_2 a^2 e_2 = \omega^2 e_2$
$\Rightarrow$ e_2 是本原幂等元.

例：$G = S_3 = D_3 = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = 1, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$ $a = (12)$ $b = (123)$

$e_1 = \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} g$, $e_2 = \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \mathrm{sgn}(g)\, g = \frac{1}{6}(1 + b + b^2 - a - ab - ab^2)$

$e_3 = \frac{1}{3}(1 + \omega^2 b + \omega b^2)$

$V_3 = Ae_3 = \mathrm{span}\{e_3, ae_3\}$

a: $e_3 \mapsto ae_3$, $ae_3 \mapsto e_3$

b: $e_3 \mapsto be_3 = \omega e_3$, $ae_3 \mapsto bae_3 = ab^{-1}e_3 = a\omega^2 e_3$

$\rho_3(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\rho_3(b) = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{bmatrix}$

$e_4 = \frac{1}{3}(1 + \omega b + \omega^2 b^2)$

$V_4 = Ae_4 = \mathrm{span}\{e_4, ae_4\}$

a: $e_4 \mapsto ae_4$, $ae_4 \mapsto e_4$,

b: $e_4 \mapsto be_4 = \omega^2 e_4$, $ae_4 \mapsto bae_4 = \omega e_4$

$\rho_4(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\rho_4(b) = \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$.

验证 e_1, e_2, e_3, e_4 是本原幂等元，且 $e_ie_j=0$ $i\neq j$. $ae_3=e_4a$

例如. e_3Ae_3 : $e_3b^ie_3=\omega^ie_3$ $\quad e_3ab^ie_3=\omega^i e_3(ae_3)$

$=\omega^i e_3e_4a=0$

e_1, e_2, e_3+e_4 是中心幂等元. $(e_3+e_4)a=a(e_4+e_3)$

$A=Ae_1\oplus Ae_2\oplus Ae_3\oplus Ae_4$ 是极小左理想分解.

$A=Ae_1\oplus Ae_2\oplus A(e_3+e_4)$ 是单理想分解.

一般地. 如果 $\mathbb{C}G=V_{11}\oplus\cdots\oplus V_{1i_1}\oplus\cdots\oplus V_{h1}\oplus\cdots\oplus V_{hi_h}$

是左正则表示的直和分解. 其中. V_{kj}, $(j=1,\cdots,i_k)$ 同构于不可约表示 W_k.

设 $\rho^k(g)$ 是 g 在 W_k 上的表示矩阵. $\rho^k(g)=\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & \rho^k_{ji}(g) & \\ & & \ddots\end{bmatrix}$

则. $e_{kj}=\frac{\dim W_k}{|G|}\sum_{g\in G}\rho^k_{jj}(g^{-1})g$ 是 V_{kj} 对应的本原幂等元

$e_k=\frac{\dim W_k}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_k(g^{-1})g$ 是 $V_{k1}\oplus\cdots\oplus V_{ki_k}$ 对应的中心幂等元

将 $\mathbb{C}G$ 看作 $\mathrm{End}(V)$ 的子代数, 幂等元相当于 V 上的投影算子

$e^2=e$ $\qquad p^2=p$

设 A 是半单结合代数，即 A 的有限维模(表示)都是完全可约的。

A 作为 A-模，可分解为极小左理想(不可约表示)的直和。

$$A = I_{11} \oplus \cdots \oplus I_{1n_1} \oplus \cdots \oplus I_{h1} \oplus \cdots \oplus I_{hn_h}.$$

I_{ij} 是极小左理想，且 $I_{ij} \cong I_{ik}$ $j,k \in \{1, \cdots, n_i\}$.

令 $A_i = I_{i1} \oplus \cdots \oplus I_{in_i}$，则 A_i 是(双边)理想。

这是由于 极小左理想 $I \cong I' \Leftrightarrow I' = II'$，$I \not\cong I' \Leftrightarrow II' = \{0\}$.

从而 $A_i A = A_i(A_1 \oplus \cdots \oplus A_h) = A_i A_i = A_i \Rightarrow A_i$ 是右理想。

进一步可证明 $A_1, \cdots, A_h$ 是 A 的所有单理想。(证明参见课本)

于是我们有：

定理：半单结合代数 A 可以分解为单理想的直和。

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_h$$

且不计次序，分解是唯一的。

注意到理想本身也是一个代数，(幂等元是单位元)。

单理想是单结合代数(没有非平凡理想)。于是。

定理：结合代数 A 是半单的当且仅当 A 是单结合代数的直和。

(证明参见课本)

单代数的结构：

例：矩阵代数 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 是单代数.

设 B 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的非平凡理想，则存在 $M=[a_{ij}]\in B$. $M\neq 0$

设 $a_{kl}\neq 0$. E_{ij} 是 (i,j) 位置为 1 的 0-1 矩阵.

$$E_{ij}=\frac{1}{a_{kl}}E_{ik}ME_{lj}\in B \quad \left(E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}\right)$$

所以 $B=\mathbb{F}^{n\times n}$

反之，单代数都同构于某个矩阵代数.

定理：设 $\mathbb{F}$ 是代数闭域（比如 $\mathbb{C}$）. B 是 $\mathbb{F}$ 上的单结合代数

则存在 $n\in\mathbb{N}$. 使得 $B\cong\mathbb{F}^{n\times n}$

定理（Wedderburn）域 $\mathbb{F}$ 上的单结合代数同构于某个矩阵代数 $\mathbb{D}^{n\times n}$

其中 $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的体.

把这些结论应用到群代数 $\mathbb{C}G$.

$$\begin{aligned}\mathbb{C}G &= V_{11}\oplus\cdots\oplus V_{1n_1}\oplus\cdots\oplus V_{h1}\oplus\cdots\oplus V_{hn_h}\\ &= A_1\oplus\cdots\oplus A_h\\ &\cong \mathbb{C}^{n_1\times n_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}^{n_h\times n_h}\\ &\cong \mathrm{End}(V_1)\oplus\cdots\oplus\mathrm{End}(V_h)\end{aligned}$$

$A=\mathbb{C}G$, $h=$ 共轭类数目

$V_{ij}=Ae_{ij}$ 极小左理想
不可约表示

e_{ij} 幂等元

$A_i=Ae_i=e_iAe_i$ 单理想

e_i 中心幂等元

$n_i=\dim V_{ij}$

$V_i\cong V_{ij}$ 不可约表示代表

下面我们求$\mathbb{C}G$的中心$Z(\mathbb{C}G)$.

设 $a=\sum\limits_{s\in G} a_s s\in Z(\mathbb{C}G)$

$$ta=at \Rightarrow \sum_{s\in G} a_s tst^{-1} = \sum_{s} a_s s$$

$$=\sum_{s\in G} a_{t^{-1}st}\, s$$

$$s'=tst^{-1},\ s=t^{-1}s't$$

$\Rightarrow a_{t^{-1}st}=a_s \quad \forall s\in G$

$\Rightarrow a_{s'}=a_s$ 当且仅当 s与s'共轭.

设 $C_1,\cdots,C_h$ 是G的共轭类. 对 $s\in C_i$. 记 $a_i=a_s$ 不依赖 s的选取

$$a=\sum_{s\in G} a_s s = \sum_{i=1}^{h}\Big(a_i\sum_{s\in C_i} s\Big)$$

令. $c_i=\sum\limits_{s\in C_i} s$. 则, $Z(\mathbb{C}G)$是由$c_1,\cdots,c_h$张成的线性子空间.

由于不同共轭类的交集是空集, 所以$c_1,\cdots,c_h$是线性无关的.

因此, $\{c_1,\cdots,c_h\}$是$Z(\mathbb{C}G)$的一组基.

但这组基不能直接给出幂等元. 即 c_i^2不是c_i的常数倍.

特征标的整性

$Z(\mathbb{C}G)$ 有两组基：$\{c_1, \cdots, c_h\}$ 和 $\{e_1, \cdots, e_h\}$

$c_i = \sum\limits_{s\in C_i} s$　　C_i 是 G 的共轭类.

e_i 是 $\mathbb{C}G$ 的本原中心幂等元.　$e_i e_j = \delta_{ij} e_i$

设这两组基间的过渡矩阵为 $T = [t_{ij}] \in \mathbb{C}^{h\times h}$

$(c_1, \cdots, c_h) = (e_1, \cdots, e_h) T$.　　$c_j = \sum\limits_{i=1}^{h} t_{ij} e_i$

下面求 t_{ij}. c_j 通过左乘 L_{c_j} 作用在单理想 e_iAe_i 上.

$e_iAe_i = I_1 \oplus \cdots \oplus I_{n_i}$，其中 I_k 是极小左理想，即不可约表示.

$\dim I_k = n_i$　$k=1, \cdots, n_i$. $\Rightarrow \dim e_iAe_i = n_i^2$

用 $c_j = \sum\limits_{s\in C_j} s$ 计算这个作用的迹

$tr(L_{c_j}) = \sum\limits_{s\in C_j} n_i \chi_i(s) = |C_j| n_i \chi_i(s_j)$　　s_j 是共轭类 C_j 的代表元.

再用 $c_j = \sum\limits_{i=1}^{h} t_{ij} e_i$ 计算这个迹.

$tr(L_{c_j}) = t_{ij}\, tr(L_{e_i}) = t_{ij} n_i^2$

这里，左乘 e_j 在 e_iAe_i 的效果为 $L_{e_j} = \begin{cases} id & j=i \\ 0 & j\neq i \end{cases}$

$\Rightarrow tr(L_{e_j}) = \delta_{ij} \dim(e_iAe_i)$.

所以 $|C_j| n_i \chi_i(s_j) = t_{ij} n_i^2 \Rightarrow t_{ij} = \dfrac{|C_j|}{n_i} \chi_i(s_j)$

另一方面．由 $e_ie_j=\delta_{ij}e_i$

$$c_j=\sum_{i=1}^n t_{ij}e_i \Rightarrow c_je_k=t_{kj}e_k$$

$\Rightarrow e_k$ 是左乘变换 L_{c_j} 的特征向量．t_{kj} 是对应的特征值．

设在 $\{c_1,\cdots,c_h\}$ 基下．L_{c_j} 的矩阵为 $A_j=[a_{ik}^j]$，$c_jc_k=\sum_{i=1}^h a_{ik}^j c_i$

此时．$a_{ik}^j\in\mathbb{N}$．这是因为 $c_jc_k\in Z(\mathbb{C}G)$ 是 $c_1,\cdots,c_h$ 的整系数线性组合．所以 t_{kj} 是整系数矩阵 A_j 的特征值．

从而是代数整数．

定义：$\alpha\in\mathbb{C}$ 称为代数数，如果 α 是整系数多项式的根

代数整数，α 是首一整系数多项式的根．

$\alpha\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\alpha\in\mathbb{Q}$ 且为代数整数

例．代数数

代数整数：单位根，$m+n\sqrt{-1}$（高斯整数）．$m+n\sqrt{2}$，$\cdots$

引理：每个代数数是某个有理方阵的根

每个代数整数是某个整数方阵的根．

设 α 的极小多项式为 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$$A=\begin{bmatrix}0 & & & -a_0\\ 1 & \ddots & & -a_1\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & -a_{n-2}\\ & & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}.$$

α 是 A 的特征值．

命题：代数数构成一个数域. 代数整数构成一个环.

即. 代数(整)数的和与积都是代数(整)数　商也是代数数.

α 的极小多项式为 $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，是A的特征值

β 的极小多项式为 $x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0$. 是B的特征值

则. $\alpha+\beta$ 是 $I_m\otimes A+B\otimes I_n$ 的特征值，$\alpha\beta$ 是 $A\otimes B$ 的特征值.

$\frac{1}{\alpha}$ 的极小多项式是 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+1$

推论：$\chi_i(g)$ 是代数整数

下面我们证明 $\chi(1)\mid |G|$

定理：设 χ 是复不可约特征标. 则. $\chi(1)\mid|G|$

证：$t_{ij}=\frac{|C_j|}{\chi_i(1)}\chi_i(s_j)$ 是整数矩阵的特征值.故为代数整数.

第一正交关系：$\frac{1}{|G|}\sum_{s\in G}\overline{\chi_i(s)}\chi_i(s)=\frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{h}|C_j|\overline{\chi_i(s_j)}\chi_i(s_j)=1$

$\frac{|G|}{\chi_i(1)}=\sum_{j=1}^{h}\frac{|C_j|}{\chi_i(1)}\chi_i(s_j)\overline{\chi_i(s_j)}$ 是代数整数.

$\frac{|G|}{\chi_i(1)}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\frac{|G|}{\chi_i(1)}\in\mathbb{N}$.

这个结论可以加强为

定理(Schur). 设 $Z(G)$ 是 G 的中心，χ 是 G 的复不可约表示特征标.

则. $\chi(1)\mid[G:Z(G)]=\frac{|G|}{|Z(G)|}$

(证明参见课本)

计算特征标表的算法.

G是有限群

1. 求出G的共轭类 $C_1, \cdots, C_h$.

得到 $c_i = \sum_{s\in C_i} s \quad i=1,\cdots,h$

2. 计算 $c_i c_j = \sum_{k=1}^{h} a_{ij}^{k} c_k$ 得到矩阵 $A_i = [a_{ik}^{j}]_{h\times h}$. $i=1,\cdots,h$

3. 求出矩阵 A_i 的特征值 t_{ji} $k=1,\cdots,h$.

这些 t_{ji} 给出了 $\frac{|C_i|}{\chi_j(1)}\chi_j(s_i)$, 和 $\frac{|C_i|}{\chi_j(1)}\chi_j(s_i^{-1})$. (因为 s_i^{-1} 的共轭类与 s_i 的共轭类含有同样多的元素)

4. 由第一正交关系 $\sum_{i=1}^{h}|C_i|\overline{\chi_j(s_i)}\chi_j(s_i)=|G|$

得. $$\sum_{i=1}^{h}\left(\frac{|C_i|}{\chi_j(1)}\chi_j(s_i^{-1})\right)\left(\frac{|C_i|}{\chi_j(1)}\chi_j(s_i)\right)=\frac{|G|}{\chi_j(1)^2}.$$

故由 t_{ji} 可得到 $\frac{|G|}{\chi_j(1)^2}$. 进而得到维数 $\chi_j(1)$

5. 由 $\frac{|C_i|}{\chi_j(1)}\chi_j(s_i)$ 和 $\chi_j(1)$ 可得 $\chi_j(s_i)$

下面我们来证明判断单群的一个条件．先证明以下命题．

命题：χ 是有限群 G 的复不可约特征标．如果存在 $g\in G$ 满足 $(\chi(1), |C_g|)=1$．那么我们有 $\chi(g)=0$ 或 $g\in Z(\chi)$

$|\chi(g)|=\chi(1)$

注记：C_g 是 g 所在的共轭类．

若 χ 是忠实表示的特征标，则 $g\in Z(\chi) \Rightarrow g\in Z(G)$．

证明：$(\chi(1), |C_g|)=1 \Rightarrow \exists\, a, b\in\mathbb{Z}$, s.t.

$$a\chi(1)+b|C_g|=1$$

$$\Rightarrow \quad a\chi(g)+b\frac{|C_g|}{\chi(1)}\chi(g)=\frac{\chi(g)}{\chi(1)}$$

由于 $\chi(g)$ 和 $\frac{|C_g|}{\chi(1)}\chi(g)$ 是代数整数．知 $\frac{\chi(g)}{\chi(1)}$ 是代数整数．

下面说明 $\frac{\chi(g)}{\chi(1)}=0$ 或 1．

设 $\alpha_1=\frac{\chi(g)}{\chi(1)}$，$\alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 α_1 的极小多项式的根．

由于 α_1 是代数整数，它的极小多项式是整系数，于是

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\in\mathbb{Z}.$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是单位根的平均值．所以 $|\alpha_i|\le 1$．

$$|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m|\le 1 \Rightarrow \alpha_1\cdots\alpha_m=0 \text{ 或 } |\alpha_1\cdots\alpha_m|=1$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\alpha_1=0 \qquad\qquad |\alpha_1|=1.$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\chi(g)=0 \qquad\qquad |\chi(g)|=\chi(1)$$

α_1 是单位根平均值

$\Downarrow$

α_i 是单位根平均值

因为 Galois 群把单位根变成单位根．

定理(Burnside). 若存在 $g\in G$ 使得 $|C_g|=p^c$ (p 为素数 $c\geq 1$).

则 G 不是非Abel单群.

证明：设 $\chi_1\cdots\chi_h$ 是 G 的不可约表示特征标. 则有第二正交关系.

$$0=\sum_{i=1}^{h}\chi_i(1)\chi_i(g)=1+\sum_{i=2}^{h}\chi_i(1)\chi_i(g).$$

χ_1 是1维平凡特征

于是存在 χ_i. s.t. $\chi_i(g)\neq 0$ 并且 $p\nmid\chi_i(1)$.

$$\sum_{i=2}^{h}\chi_i(g)\frac{\chi_i(1)}{p}=-\frac{1}{p}.$$

由于 $-\frac{1}{p}$ 不是代数整数. 知左边必有一项不是代数整数.

所以存在 χ_i 使得 $\chi_i(g)\neq 0$. $\frac{\chi_i(1)}{p}$ 不是整数.

这样就有 $(|C_g|,\chi_i(1))=1$. 所以 $g\in Z(\chi_i)\Rightarrow Z(\chi_i)\neq\{1\}$.

假设 G 是非Abel单群.

G 是单群 $\Rightarrow \ker\chi_i=\{1\}$. 否则. $\varphi_i(G)=1$. χ_i 为平凡表示.

$\Rightarrow \varphi_i(G)\cong G$, $Z(G)=Z(\chi_i)\neq\{1\}$.

$\Rightarrow Z(G)=G$ (因为 G 是单群. $Z(G)=\{1\}$ 或 G)

$\Rightarrow G$ 是Abel群. 矛盾

所以 G 不是非Abel单群.

由以上定理可推出利用表示论解决群论问题的著名结果.

定理(Burnside)：设 $|G|=p^a q^b$. p,q 是不同素数. 则 G 是可解群.

可解群：存在正规群列. $G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G$ 使得 G_{i+1}/G_i 为交换群.

例. p-群是可解群. $|G|=p^a$.

例. H 与 G/H 都是可解群，则 G 也是可解群.

证明：只需考虑 $a,b\geq 1$ 的情形. 考虑 G 的 Sylow q 子群 Q

$|Q|=q^b \Rightarrow Z(Q)\neq\{1\}$.

$\forall g\in Z(Q)$. $g\neq 1$. 则 $Q\subseteq C_G(g)$. g 在 G 中的中心化子

从而 $|C_g|=|G|/|C_G(g)|=p^c$. (因为 $q^b=|Q|\mid|C_G(g)|$).

当 $c>0$ 时. G 不是单群. 从而存在 $H\lhd G$, $|H|=p^{a'}q^{b'}$

当 $c=0$ 时. $G=C_G(g)$，令 $H=\langle g\rangle$. 则 $H\lhd G$,

对 a,b 做归纳法. 由 H 与 G/H 都是可解群知 G 也是可解群.