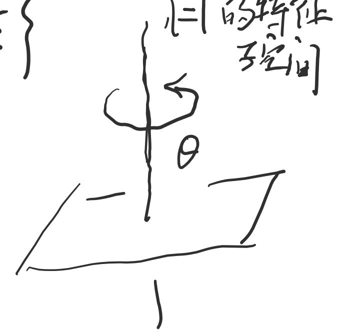
点群及其表示

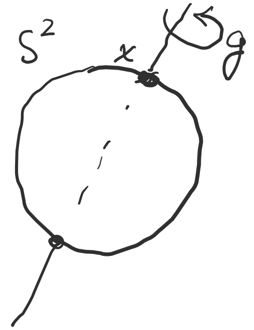
$$SO(3)=\{A\in\mathbb{R}^{3\times 3}\mid A^TA=A^TA=I,\ \det A=1\}=\{\mathbb{R}^3\text{中}\overset{\det>0}{\text{保定向}}\text{的正交变换}\}=\{\mathbb{R}^3\text{中的旋转}\}$$

相似于 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$



SO(3)的有限子群称为点群（第一类点群）.（注：O(3)的有限子群称为第二类点群）

SO(3)在2维单位球面上有群作用，$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2+z^2=1\}$. $g\in SO(3)$, $g\neq 1$, 满足 $gx=x$ 的点 $x\in S^2$ 称为 g 的极点.



$g\neq 1$ g 在 S^2 上有2个极点.

设 G 是 $SO(3)$ 的有限子群（点群）　设 P 是 G 的极点的集合，P 是有限集　G 在 P 上有群作用

命题：（Burnside引理 Polya计数原理）有限群 G 在有限集 P 上有群作用，则，轨道数 $= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\{g\text{的不动点}\}|$

$P^g = \{g\text{的不动点}\}$．　$G_x = x$ 的迷向子群

证：组合方法：$\sum_{x\in P}|G_x| = \left|\{(g,x) \mid gx = x\}\right| = \sum_{g\in G}|P^g|$ 可推出．

表示论方法：考虑 G 在 P 上的置换表示．$V = \mathrm{span}\{x \mid x\in P\} = \{\sum a_i x_i \mid x_i\in P\}$　$g(\sum a_i x_i) = \sum a_i\, g x_i$

$V^G = \{v\in V \mid gv = v,\ \forall g\in G\}$，　$\dim V^G = (\chi_V, \chi_1)$．．$\chi_1$ 是1维平凡表示特征标．

证：$V = \oplus m_i V_i$，　$V_1 \cong 1$ 维平凡表示．则 $V^G \cong m_1 V_1$，　$\dim V^G = m_1 = (\chi_V, \chi_1)$

$\chi_V(g) = \left|\{g\text{的不动点}\}\right|$，　$(\chi_V, \chi_1) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\{g\text{的不动点}\}|$

V^G的基可取为 $v_i = \sum_{x\in P_i} x$　　P_i是P的一个轨道.　　$P = \begin{matrix} \{\cdots\ x_1 \cdots g_1 x_1 \cdots\} = P_1 \\ \{\cdots\ x_2 \cdots g_1 x_2 \cdots\} = P_2 \\ \vdots \end{matrix}$

$P_i \cap P_j = \phi \Rightarrow v_i$ 线性无关.

$v = \sum a_x x \in V^G$　　$gv = v \Rightarrow \sum a_x \underline{\underline{gx}} = \sum a_x x$　$\Rightarrow$ 若 $gx = y$, 则 $a_y = a_x$　即若$y, x \in P_i$, 则 $a_y = a_x$

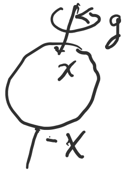
$= \sum a_y \underline{\underline{y}}$

$$\Rightarrow v = a_1\left(\sum_{x\in P_1} x\right) + a_2\left(\sum_{x\in P_2} x\right) + \cdots = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots$$

$\dim V^G =$ 轨道数 ..　　$\Rightarrow$ 轨道数 $= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \left|\{g\text{的不动点}\}\right|$

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \left|\{g\text{的不动点}\}\right|$$

G 是 $SO(3)$ 的有限子群. $g\neq 1$, g 的极点 $=\{x\in S^2 \mid gx=x\}$



g 有 2 个极点 $\{x,-x\}$.

P 是 G 的元素的极点的集合. G 在 P 有群作用. $P^g=\{g\text{的极点}\}$

$$\text{轨道数}=\frac{1}{|G|}\sum_g \left|\{g\text{的不动点}\}\right| = \frac{1}{|G|}\Big(\underbrace{|P|}_{g=1\text{的不动点}} + \underbrace{2(|G|-1)}_{g\neq 1\text{的不动点}}\Big)$$

设 $P_1,\dots,P_k$ 是 G 的轨道.

$$k=\frac{1}{|G|}\left(\sum_{i=1}^{k}|P_i|+2(|G|-1)\right) \Rightarrow k-\sum_{i=1}^{k}\frac{|P_i|}{|G|}=2\left(1-\frac{1}{|G|}\right)$$

n_i 是 P_i 中某个点 x 的迷向子群 G_x 的阶数, $n_i=\dfrac{|G|}{|P_i|}$

$$\Rightarrow k-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}=2\left(1-\frac{1}{|G|}\right)$$

$P_i=\{\cdot\ x_1 \xrightarrow{g} x_2 \ \cdots\cdots\}$

$G_{x_1}\cong G_{x_2}$

$G_{x_2}=gG_{x_1}g^{-1}$

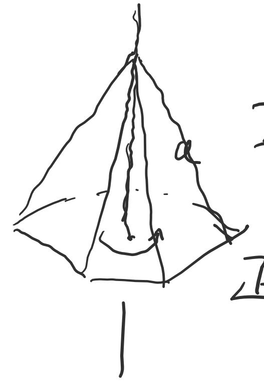
$n_i\geq 2$

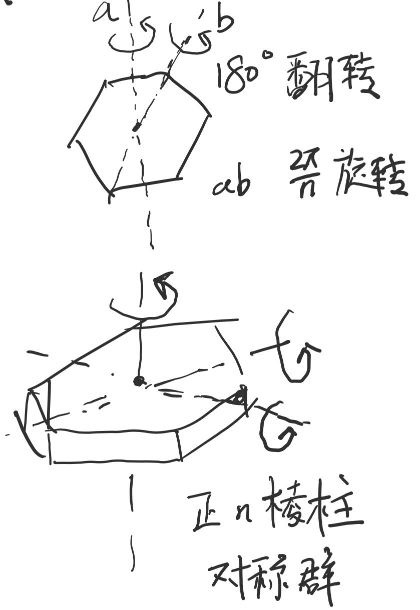
$$\boxed{\sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{n_i}\right)=2\left(1-\frac{1}{|G|}\right)}$$

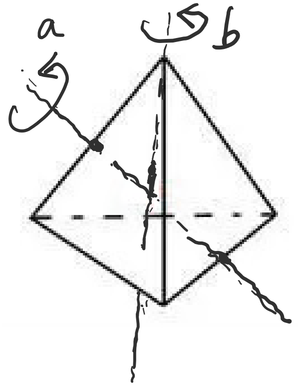
求解. k, n_i, $|G|$, (参考课本第一章)

定理：设 G 是 $SO(3)$ 的有限子群，则 P 的轨道数为 2 或 3，且 G 的解为

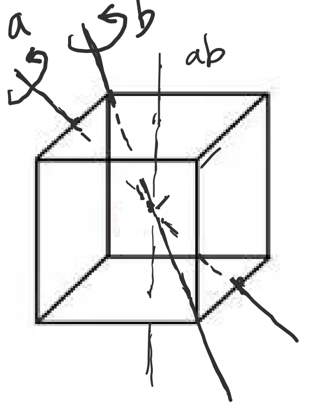
G	k	n_1	n_2	n_3	$\lvert G\rvert$	
C_n	2	n	n	—	n	$\langle a \mid a^n = 1 \rangle$
D_n	3	2	2	n	$2n$	$\langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^n = 1 \rangle$ 二面体群，正 n 边形对称群
T	3	2	3	3	12	$\langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^3 = 1 \rangle \cong A_4$
O	3	2	3	4	24	$\langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^4 = 1 \rangle \cong S_4$
I	3	2	3	5	60	$\langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^5 = 1 \rangle \cong A_5$

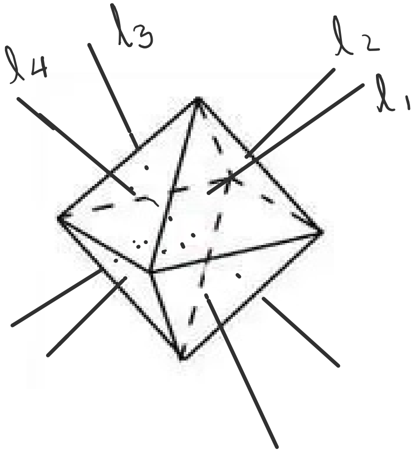






$T = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^3 = 1 \rangle \cong A_4 = \{$4个顶点的偶置换$\}$

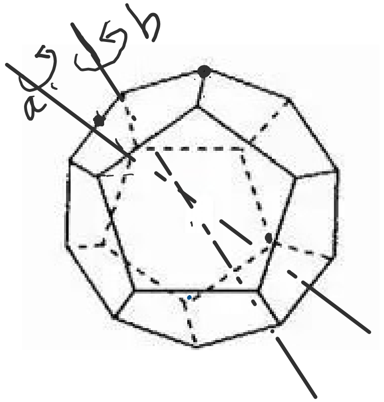


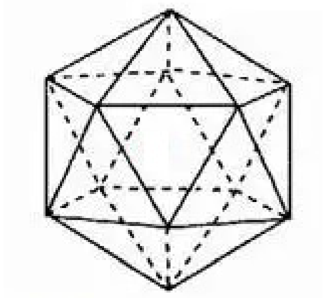


$O = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^4 = 1 \}$

$\cong S_4 = \{$正八面体的4条面心连线的置换$\}$

$l_1\ l_2\ l_3\ l_4$





$I = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^5 = 1 \}$

$\cong A_5 = \{$正十二面体,中5个内接正4面体的偶置换$\}$.

20个顶点

点群的特征标表.

1. C_n, $\chi_k(a) = e^{\frac{2\pi i(k-1)}{n}}$, $k=1,2,\cdots,n$

2. $D_n = \langle a, b \mid a^2 = b^n = (ab)^2 = 1 \rangle$, $= \{a^i b^j \mid i=0,1,\ j=0,1,\cdots,n-1\}$. $a^{p_1}b^{q_1}\, a^{p} b^{q} (a^{p_1} b^{q_1})^{-1} = a^{p} b^{2q_1 - q}$

$aba^{-1} = b^{-1}$ $\quad ab = b^{-1}a$

D_{2m-1} 有 $m+1$ 个共轭类. $\{1\}$. $\{a, ab, ab^2, \cdots, ab^{2m-2}\}$, $\{b^i, b^{-i}\}$. $(i=1,2,\cdots,m-1)$.

D_{2m} 有 $m+3$ 个共轭类 $\{1\}$. $\{a, ab^2, \cdots ab^{2m-2}\}$. $\{ab, ab^3, \cdots, ab^{2m-1}\}$. $\{b^i, b^{-i}\}$, $(i=1,2,\cdots,m-1)$ $\{b^m\}$

$[a^{p_1} b^{q_1}, a^{p_2} b^{q_2}] = b^{2(q_2 - q_1)}$. $\quad D_n' = \langle b^2 \rangle$

D_{2m-1}

	1	a	b	$\cdots$	b^j	$\cdots$	b^{m-1}
χ_1	1	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1
χ_2	1	-1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1

$D_{2m-1}' = \langle b^2 \rangle = \langle b \rangle$ $\quad D_{2m-1} / D_{2m-1}' = \langle \bar{a} \mid \bar{a}^2 = 1 \rangle$

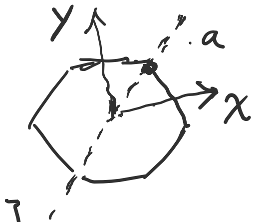
$D_{2m}' = \langle b^2 \rangle$ $\quad D_{2m}/D_{2m}' = \langle \bar{a}, \bar{b} \mid \bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a},\ \bar{a}^2 = \bar{b}^2 = 1 \rangle$

$= \langle \bar{a} \rangle \times \langle \bar{b} \rangle \cong C_2 \times C_2$

D_{2m}

	1	a	ab	b	$\cdots$	b^j	$\cdots$	b^m
χ_1	1	1	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1
χ_2	1	-1	-1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1
χ_3	1	1	-1	-1	$\cdots$	$(-1)^j$	$\cdots$	$(-1)^m$
χ_4	1	-1	1	-1	$\cdots$	$(-1)^j$	$\cdots$	$(-1)^m$

D_n 的2维自然表示.(正n边形的对称群).



a的旋转轴取成x-y坐标系的对角线.

$b = \frac{2\pi}{n}$ 旋转.

$$\rho_k(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rho_k(b) = \begin{bmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{bmatrix} \quad k = 0, 1, \cdots, \left[\frac{n-1}{2}\right] \quad (\rho_k \sim \rho_{-k})$$

$$\chi_k(a) = 0 \qquad \chi_k(b^j) = 2\cos\frac{2kj\pi}{n} \quad j = 0, \cdots, n-1, \quad \chi_k(ab^j) = 0$$

验证 ρ_k 不可约. $(\chi_k, \chi_k) = \frac{1}{|G|}\sum_{j=0}^{n-1} 4\cos^2\frac{2kj\pi}{n} = \begin{cases} 1 & k \neq \frac{n}{2} \\ 2 & k = \frac{n}{2} \end{cases}$ 当 $k \neq \frac{n}{2}$ 时, ρ_k 不可约.

D_{2m-1} 1维表示 2个 2维不可约表示:$(m-1)$个. $2\cdot 1^2 + (m-1)\cdot 2^2 = 2(2m-1) = |G|$

D_{2m} 1维表示 4个. 2维不可约表示 $(m-1)$个 $4\cdot 1^2 + (m-1)\cdot 2^2 = 2\cdot 2m = |G|$

D_{2m-1}

$\theta = \frac{2\pi}{n}$

	1	a	b	$\cdots$	b^j	$\cdots$	b^{m-1}
χ_1							
χ_2							
χ_3							
$\vdots$							
χ_{k+2}	2	0	$2\cos k\theta$	$\cdots$	$2\cos kj\theta$	$\cdots$	$2\cos k(m-1)\theta$
$\vdots$							
χ_{m-1}							

D_{2m}

	1	a	ab	b	$\cdots$	b^j	$\cdots$	b^m
χ_1								
χ_2								
χ_3								
χ_4								
χ_5								
$\vdots$								
χ_{4+k}	2	0	0	$2\cos k\theta$	$\cdots$	$2\cos kj\theta$	$\cdots$	$2\cos km\theta$
$\vdots$								

$A_4 = \{偶置换\} \subseteq S_4 \qquad |A_4| = 12$

共轭类：$C_1 = \{(1)\}$. $C_2 = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. $C_3 = \{(123), (134), (243), (142)\}$. $C_4 = \{(132), (124), (431), (234)\}$

$K = C_1 \cup C_2$ 是 A_4 的正规子群. $|A_4/K| = 3$ 　A_4/K 是交换群. $\Rightarrow K \supseteq A_4'$

$(123)(124)(123)^{-1}(124)^{-1} = (312)(124)(321)(421) = (31)(24)(32)(14) = (12)(34) \in A_4'$. $\Rightarrow K \subseteq A_4'$.

$\Big\}\ K = A_4'$

A_4 有3个1维表示. $A_4 \to A_4/K = \{K, \underset{C_3K}{(123)K}, \underset{C_4K}{(123)^2K}\}$.

χ_1: $K \mapsto 1 \quad (123)K \mapsto 1. \quad (123)^2K \mapsto 1$

χ_2: $K \mapsto 1 \quad (123)K \mapsto \omega \quad (123)^2K \mapsto \omega^2 \qquad \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

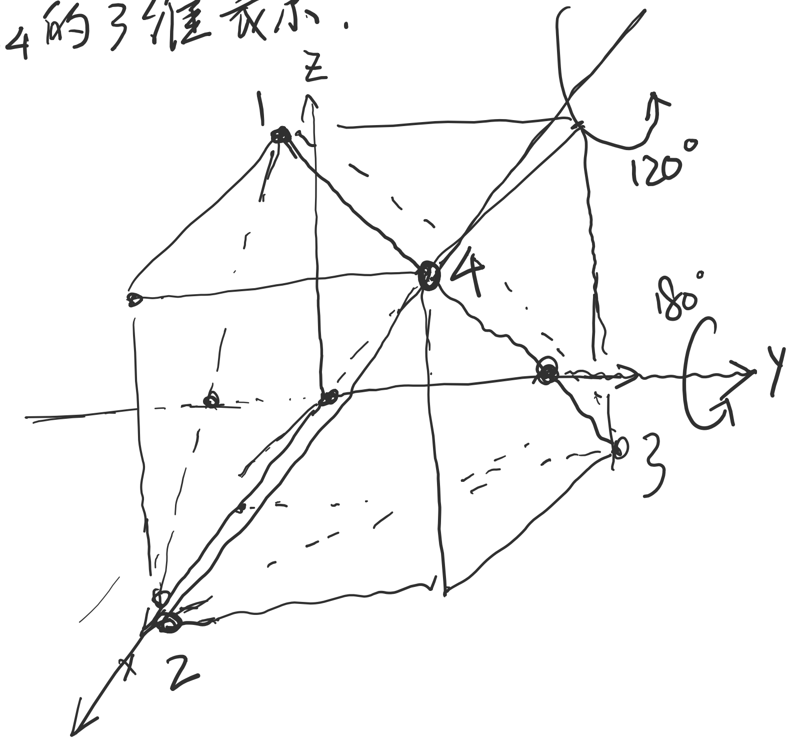
χ_3: $K \mapsto 1 \quad (123)K \mapsto \omega^2 \quad (123)^2K \mapsto \omega$

	C_1	C_2	C_3	C_4
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

（C_1、C_2 上方标 K）

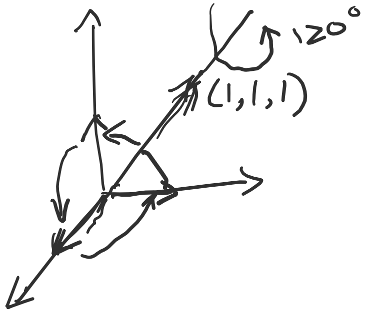
正交关系

A_4的3维表示.



以$(1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$ $(1,-1,-1)$为顶点的正四面体.

	C_1	C_2	C_3	C_4
	(1)	$(12)(34)$	(123)	(213)
	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
		绕y轴的180°旋转		
χ_4	3	-1	0	0



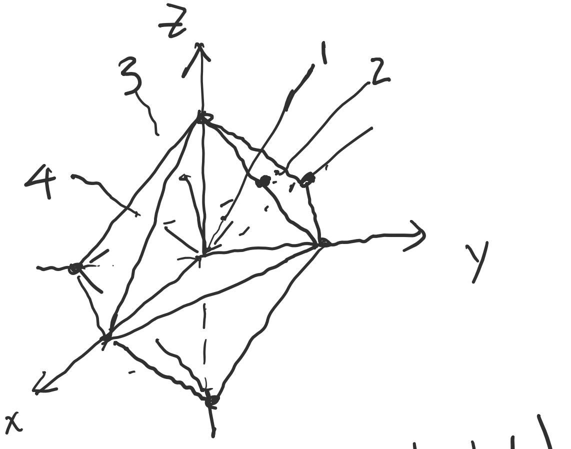
S_4： $|S_4|=24$ 共轭类 $\{(1)\}$ $\{(12)\}$ $\{(123)\}$ $\{(1234)\}$ $\{(12)(34)\}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad (1) \quad (6) \quad (8) \quad (6) \quad (3)$

$$24 = 1^2+1^2+d_3^2+d_4^2+d_5^2$$
$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 2^2 \quad 3^2 \quad 3^2$$
$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \rho_3 \quad \rho_4 \quad \rho_5$$

$S_4' = A_4$ $\quad |S_4/A_4| = 2$. S_4有2个1维表示：平凡表示ρ_1，符号表示ρ_2. $g \mapsto \mathrm{sgn}(g)$.

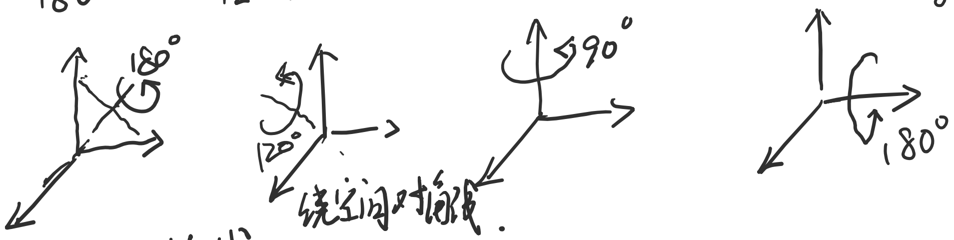
3维表示ρ_4：正八面体对称群. $S_4 = \{4$条面心连线的置换$\} = \{4$条空间对角线的置换$\}$.



六个顶点是$(\pm1, \pm1, \pm1)$

$\{(1)\}$ $\{(12)\}$ $\{(123)\}$ $\{(1234)\}$. $\{(12)(34)\}$.

绕线心连线 180° | 绕面心连线 120°, 240° | 绕顶点连线 90° | 绕顶点连线 180°



绕空间对角线

绕y-z平面对角线

$$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$3 \quad\quad -1 \quad\quad 0 \quad\quad 1 \quad\quad -1$$

另一个3维表示，$\rho_5 = \rho_4 \otimes \rho_2$

$\chi_5 = \chi_4 \cdot \chi_2$

	$\{(1)\}$	$\{(12)\}$	$\{(123)\}$	$\{(1234)\}$	$\{(12)(34)\}$.
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_4	3	-1	0	1	-1
χ_5	3	1	0	-1	-1

ρ_4，ρ_5 都是不可约的，$\frac{1}{24}\left(3^2 + (\pm 1)^2 \cdot 6 + 0^2 \cdot 3 + (\pm 1)^2 6 + (-1)^2 \cdot 3\right) = 1$

正交关系：χ_3 $\underline{2}$ 0 -1 0 $\underline{2}$

$K = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

$S_4/K \cong S_3$.

$$\begin{tikzcd} S_4 \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "2\text{维表示}\,\rho_3"'] & S_3 \arrow[r] & GL(2,\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

S_4 共轭作用在共轭类 $\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ = S_3 的置换表示 = 平凡表示 $\oplus$ 约减表示

3维 1维 2维

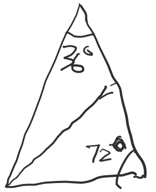
A_5 $|A_5|=60$. $\{(1)\}$ $\{(12)(34)\}$ $\{(123)\}$ $\{(12345)\}$ $\{(21345)\}$.

(1)	(15)	(20)	(12)	(12)

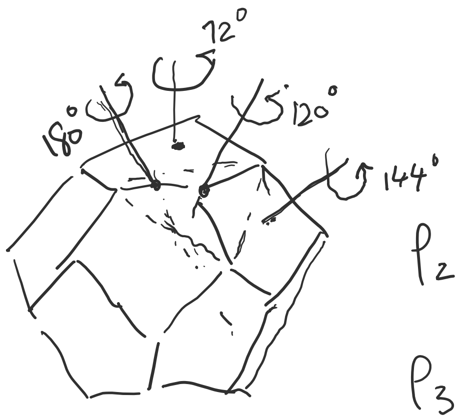
A_5 是单群，只有1个1维表示。

3维表示、正十二面体对称群

$g\in SO(3)$ 相似于 $\begin{bmatrix}1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ $\chi(g)=\mathrm{tr}\begin{bmatrix}1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = 1+2\cos\theta$



$\cos 72° = \frac{\sqrt5-1}{4}$



	$\{(1)\}$	$\{(12)(34)\}$	$\{(123)\}$	$\{(12345)\}$	$\{(21345)\}$
		180°	120°, 240°	72°, 288°	144°, 216°
		线心连线	顶点中心连线	面心连线	面心连线
ρ_2: 3		-1	0	$\frac{1+\sqrt5}{2}$	$\frac{1-\sqrt5}{2}$
ρ_3: 3		-1	0	$\frac{1-\sqrt5}{2}$	$\frac{1+\sqrt5}{2}$

g_1 与 g_2 在 A_5 中共轭。

$\Longleftrightarrow$ θ 相等且它们的对称轴能由 A_5 中的元素相连

A_5 置换5个内接正四面体.

$A_5 \xrightarrow{\varphi} A_5 \xrightarrow{\rho_2} GL(2,\mathbb{C})$ $\rho_3 = \rho_2\circ\varphi$

$g \longmapsto (12)^{-1} g (12)$

$\varphi((12345)) = (21345)$

外自同构.

$\rho_3((12345)) = \rho_2(\varphi(12345))$

$= \rho_2((21345))$

$\rho_3((21345)) = \rho_2((12345))$

$60 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2$ $\qquad d_4^2 + d_5^2 = 41$. $\qquad d_4 = 4,\ d_5 = 5$

	(1)	$(12)(34)$	(123)	(12345)	(21345)
5维置换表示	5	1	2	0	0
平凡表示	1	1	1	1	1
约减表示 χ_4	4	0	1	-1	-1

置换表示特征标 = 不动点个数

置换表示 = 平凡表示 ⊕ 约减表示

不可约：$\frac{1}{60}\left(4^2 + 15\cdot 0^2 + 20\cdot 1^2 + 12\cdot(-1)^2 + 12(-1)^2\right) = 1$

A_5 作用在正十二面体的6条面心连线上.

6维置换表示	6	0	0	1	1
平凡表示	1	1	1	1	1
约减表示 χ_5	5	-1	-1	0	0

数不动点

不可约 $\frac{1}{60}\left(5^2 + 15(-1)^2 + 20(-1)^2 + 12\cdot 0^2 + 12\cdot 0^2\right) = 1$