10月5日讲义

$\mathrm{Hom}(V,W)=\{$从V到W的线性映射$\}$.

(ρ_1, V)和(ρ_2, W)是G的表示, $\mathrm{Hom}(V,W)$上的群作用可定义为

$$\rho_H(g)(A)=\rho_2(g)\circ A\circ\rho_1(g^{-1}) \qquad \forall g\in G,\ A\in \mathrm{Hom}(V,W)$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & W \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V \arrow[r, "\rho_H(g)(A)"'] & W \end{tikzcd}$$

验证 $\rho_H(g_1g_2)=\rho_H(g_1)\cdot\rho_H(g_2) \quad \forall g_1,g_2\in G$

$$\rho_H(g_1g_2)(A)=\rho_2(g_1g_2)A\rho_1((g_1g_2)^{-1})=\rho_2(g_1)\big(\rho_2(g_2)A\rho_1(g_2^{-1})\big)\rho_1(g_1^{-1})$$

$$=\rho_2(g_1)\big(\rho_H(g_2)(A)\big)\rho_1(g_1^{-1})=\rho_H(g_1)\big(\rho_H(g_1)(A)\big)$$

特别地 $W=\mathbb{F}$ $\quad \mathrm{Hom}(V,\mathbb{F})=V^*$, ρ_H称为对偶表示 ρ^*

$Hom(V, W)$上群作用的不动点集为$Hom(V,W)^G = \{ T \in Hom(V,W) \mid \rho_H(g)(T) = T, \forall g \in G \}$.

$$\rho_H(g)(T) = \rho_2(g) \cdot T \cdot \rho_1(g)^{-1} = T \iff \rho_2(g) \cdot T = T \cdot \rho_1(g)$$

$\iff T$ 是从V到W的缠结算子.

$$Hom(V,W)^G = \{从V到W的缠结算子\}$$

由第1次作业题，从$Hom(V,W)$到$Hom(V,W)^G$的投影是$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_H(g)$

任取$A \in Hom(V,W)$. $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_H(g)(A) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_2(g) A \rho_1(g^{-1})$ 是从V到W的缠结算子.

记号：$Hom_G(V,W) := Hom(V,W)^G = \{从V到W的缠结算子\}$

Schur 引理：设 (ρ_1, V_1) 和 (ρ_2, V_2) 是 G 的不等价不可约表示，则

<1>. $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)=0$

<2>. $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_1)$ 是体（斜域 skew-field）（含单位元的环，且非零元可逆）

<3>. V 是复不可约表示，则 $\mathrm{Hom}_G(V, V)\cong\mathbb{C}$，$V$ 上的缠结算子都是数乘 $\lambda\cdot id_V$

证：<1> 设 $T\in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ 为缠结算子，则 $\ker T$ 是 V_1 的 G-不变子空间，

$\mathrm{Im}T$ 是 V_2 的 G-不变子空间.

V_1 不可约 $\Rightarrow \ker T=\{0\}$ 或 V_1，若 $\ker T=\{0\}$，则 $\mathrm{Im}T\cong V_1$，

V_2 不可约 $\Rightarrow \mathrm{Im}T=\{0\}$ 或 V_2. $\mathrm{Im}T=V_2\Rightarrow V_1\cong V_2$ 与 V_1, V_2 不等价矛盾，故 $\mathrm{Im}T=\{0\}$.

<2>. $T\in \mathrm{Hom}_G(V, V)$ 且 $T\neq 0$ 则 $\ker T\neq V$. 所以 $\ker T=\{0\}$，即 T 可逆.

$\mathrm{Hom}_G(V, V)$ 中的非零元均可逆，所以它是体.

(3): $T\in \mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$ 在 $\mathbb{C}$ 中有特征值 λ，故 $T-\lambda\,\mathrm{id}_V$ 不可逆.（因为 λ 的特征向量非零）

所以 $T-\lambda\,\mathrm{id}_V=0$ 即 $T=\lambda\,\mathrm{id}_V$

推论：(ρ,V) 是 G 的不可约表示当且仅当 $\mathrm{Hom}_G(V,V)$ 是体

证明：若 V 有非平凡 G 不变子空间 W，则由完全可约性定理的证明可知存在

从 V 到 W 的投影算子 $p_W\in\mathrm{Hom}(V,V)$，且 p_W 是缠结算子.

由于 p_W 是不可逆的，所以 $\mathrm{Hom}_G(V,V)$ 不是体.

Frobenius 定理：$\mathbb{R}$ 上的有限维体为 $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$.（四元数体）

证明参见课本 42 页

例. $G = C_4 = \langle g \mid g^4 = e \rangle$　　$V = \mathbb{R}$上2维线性空间. $\rho(g) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = J$. 可验证 $J^2 = -I$

(ρ, V)是不可约的. 因为$\rho(g)$在$\mathbb{R}$上没有特征值.

设 $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 为缠结算子, 则. $T\cdot\rho(i) = \rho(i)\cdot T$. $\Rightarrow$. $T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = aI + bJ \longmapsto a+bi$

所以 $Hom_G(V, V) \cong \mathbb{C}$

例. $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$　$i^2 = j^2 = k^2 = -1$,　$ij = -ji = k$,　$jk = -kj = i$,　$ki = -ik = j$

$V = \mathbb{H}$, 基是$\{1, i, j, k\}$. Q_8在V上的作用是左乘. $\rho(g)(x) = g\cdot x$.　$g \in Q_8$, $x \in V$.

$$\rho(i) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rho(j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

缠结算子 T 满足 $\rho(i)T=T\rho(i)$， $\rho(j)T=T\cdot\rho(j)$.

设 $T=\begin{bmatrix} A_{2\times 2} & B_{2\times 2} \\ C_{2\times 2} & D_{2\times 2}\end{bmatrix}$ 可解得： $T=a\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & -J\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} 0 & J \\ J & 0\end{bmatrix}\mapsto a+bi+cj+dk$

所以 $Hom_{Q_8}(\mathbb{H},\mathbb{H})\cong\mathbb{H}$

一般地，由乘法满足结合律 $(gx)h=g(xh)$

知 左乘变换和右乘变换可交换、用左乘变换定义群作用，则右乘变换给出缠结算子.

$(\rho,\mathbb{H})$是Q_8的不可约表示。

Schur 引理：设 (ρ_1, V_1) 和 (ρ_2, V_2) 是不等价复不可约表示，

(1). $Hom_G(V_1, V_2) = 0$

(2). $Hom_G(V_1, V_1) \cong \mathbb{C}$ 　缠结算子是数乘变换 $\lambda \cdot id_V$

取线性映射 $A \in Hom(V_1, V_2)$，

则 $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_2(g) A \rho_1(g)^{-1}$ 是从 V_1 到 V_2 的缠结算子.

当 $\rho_1 \neq \rho_2$ 时. $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_2(g)A\rho_1(g)^{-1}=0 \quad \forall A\in Hom(V_1,V_2)$

当 $\rho_1=\rho_2=\rho$ 时. $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)A\rho(g)^{-1}=\lambda id_V$, 两边取迹. $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}tr(\rho(g)A\rho(g)^{-1})=tr(\lambda\cdot id_\lambda)$

$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}trA=\lambda\cdot dimV \qquad \frac{1}{|G|}\cdot|G|\cdot trA=\lambda\cdot dimV \qquad \lambda=\frac{trA}{dimV}$.

$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)A\rho(g)^{-1}=\frac{trA}{dimV}\cdot id_V$

取 V_1 的基和 V_2 的基, $\rho_1(g)$ 的矩阵为 $[\rho^1_{ij}(g)]_{n\times n}$. $\rho_2(g)$ 的矩阵为 $[\rho^2_{kl}(g)]_{m\times m}$

令 $\underbrace{A=E_{pq}}_{0-1\text{矩阵}}=\begin{array}{c|c} & q\text{列} \\ \hline p\text{行} & \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \\ & & \end{bmatrix}\end{array}$

则 $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}[\rho^2_{kl}(g)]\cdot E_{pq}\cdot[\rho^1_{ij}(g^{-1})]=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}[\underbrace{\rho^2_{kp}(g)\rho^1_{qj}(g^{-1})}_{(k,j)\text{矩阵元}}]_{m\times n}=[\underbrace{\frac{1}{|G|}\sum_{g}\rho^2_{kp}(g)\rho^1_{qj}(g^{-1})}_{(k,j)\text{位置}}]_{m\times n}$

当 $\rho_1 \neq \rho_2$ 时. $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho^2_{kp}(g)\rho^1_{qj}(g^{-1})=0$

当 $\rho_1=\rho_2=\rho$ 时. $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{kp}(g)\rho_{qj}(g^{-1})=\frac{tr(E_{pq})}{n}\delta_{kj}=\frac{1}{n}\delta_{pq}\delta_{kj}$

设 V_1, V_2 上有 G-不变内积. $((\rho(g)v,\rho(g)w)=(v,w))$ 则. $\rho(g)$ 是酉矩阵. $(\rho(g)^{-1}=\overline{\rho(g)^T})$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho^2_{kp}(g)\rho^1_{qj}(g^{-1})=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho^2_{kp}(g)\overline{\rho^1_{jq}(g)}=0 \qquad \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{kp}(g)\overline{\rho_{jq}(g)}=\frac{1}{n}\delta_{pq}\delta_{kj}$$

在 G 的函数空间 $C(G)$ 上定义内积. $(\varphi,\psi)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)\overline{\psi(g)}$

把表示的矩阵元 ρ_{kj} 看作 G 上的函数,

命题(矩阵元的正交性). 设 (ρ_1, V_1) 和 (ρ_2, V_2) 是不等价复不可约表示, 则.

$$(\rho^1_{kp}, \rho^2_{jq}) = 0 \qquad (\rho^1_{kp}, \rho^1_{jq}) = \frac{1}{\dim V_1}\delta_{kj}\delta_{pq}$$

下面会证明: (ρ_i, V_i) 是所有复不可约表示. $\{\sqrt{\dim V_i}\,\rho^i_{kj}\}$ 组成 $C(G)$ 的标准正交基.

例: S_3: (ρ_1, V_1) 1维平凡表示、(ρ_{-1}, V_{-1}) 符号表示, (ρ_2, V_2) 2维不可约表示、正三角形对称

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & (1) & (12) & (13) & (23) & (123) & (321) \\
\hline
\rho_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\rho_{-1} & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
\rho_2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{array}$$

$\rho^{-1} = [1, -1, -1, -1, 1, 1]$

$\rho^2_{12} = [0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$. $\rho^2_{21} = [0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}]$

验证: $(\rho^{-1}, \rho^2_{12}) = 0$

$(\rho^2_{12}, \rho^2_{21}) = 0$

$(\rho^2_{12}, \rho^2_{12}) = (\rho^2_{21}, \rho^2_{21}) = \frac{1}{2}$