复不可约表示分类.

问题: 复不可约表示 (ρ, V) 是否等价于实表示. 即. $\rho(g) \in GL(n, \mathbb{C})$ 能否同时相似于 $\rho_0(g) \in GL(n, \mathbb{R})$. $\forall g \in G$
能在 $\mathbb{R}$ 上实现

$\Longleftrightarrow$ (ρ, V) 是否有实形 即: $V = \underset{\{e_1,\cdots,e_n\}}{V_0} \oplus \underset{\{\sqrt{-1}e_1,\cdots,\sqrt{-1}e_n\}}{\sqrt{-1}\, V_0}$ V_0 是 G 的不变子空间.

V_0 是实线性组合

例: D_4 = 正方形对称群 $= \langle a, b \mid a^2=1.\ b^4=1.\ a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$

$\rho(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. $\rho(b) = \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{等价于}}$ $\rho_0(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\rho_0(b) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$

特征标相同

例: $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.

$\rho(i) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$. $\rho(j) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\rho(k) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ 不能等价于实表示. (后面验证)

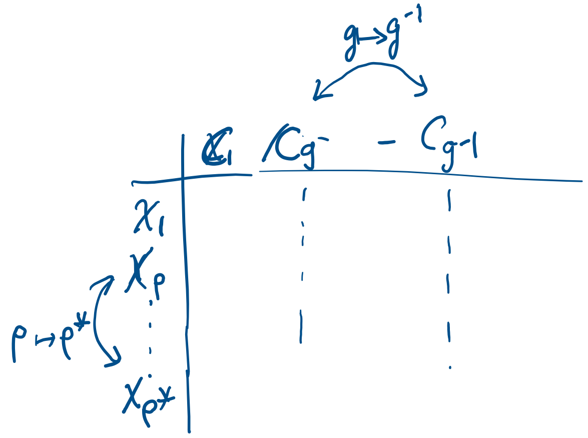
能在$\mathbb{R}$上实现的必要条件是特征标取值都是实数。 $\rho(g)$相似于 $\rho_0(g)\in GL(n,\mathbb{R}) \Rightarrow \chi(g)\in\mathbb{R}$

定义：如果 $\chi(g)\in\mathbb{R}$，$\forall g\in G$，那么 χ 称为实特征标。

命题：χ_ρ 是实特征标 $\Longleftrightarrow \rho\cong\rho^*$ (ρ是自对偶的)，($\chi_{\rho^*}(g) = \overline{\chi_\rho(g)}$)

定义：G的共轭类C称为实共轭类，如果 $g\in C \Longleftrightarrow g^{-1}\in C$

命题：复不可约实特征标的数目等于实共轭类的数目。



证明：看特征标表X，取逆变换 $g\mapsto g^{-1}$ 给出特征标表的列置换P

取复共轭 $\chi\mapsto\bar\chi$，$\rho\mapsto\rho^*$ 给出特征标表的行置换Q

$\mathrm{tr}P =$ 实共轭类数目。 $\mathrm{tr}Q =$ 实特征标数目 $P=X^{-1}QX$ (练习 $\det X = ?$)。

$$XP = \bar X \qquad QX = \bar X \quad\Rightarrow\quad XP = QX \Rightarrow \mathrm{tr}P = \mathrm{tr}Q$$

$\chi(g) = \overline{\chi(g^{-1})}$

命题：$|G|$ 是奇数，当且仅当 G 没有非平凡不可约实特征标.（G 没有非平凡实共轭类）

证：$|G|$ 是奇数 $\Rightarrow \forall g \neq 1$，$g$ 与 g^{-1} 不共轭.

（假如 $\exists g$，$hgh^{-1}=g^{-1} \Rightarrow h g^{-1} h^{-1} = g \Rightarrow h^2 g h^{-2} = g \Rightarrow h^2 g = g h^2 \Rightarrow$

$|G|=2n-1 \Rightarrow h^{2n}=h$

$h^{2n} g = g h^{2n} \Rightarrow h^{2n} g h^{-2n} = g$

$\Rightarrow hgh^{-1}=g$

$\Rightarrow g^{-1}=g$

$g^2=1$ 与 $|G|$ 是奇数矛盾.

$|G|$ 是偶数 $\Rightarrow$ G 有 2 阶元素. $\Rightarrow \exists g \neq 1$，$g=g^{-1} \Rightarrow g$ 的共轭类是实的.

练习：$|G|$ 是奇数，则 其共轭类的数目 $\equiv |G| \pmod{16}$

研究 $(\rho, V) \cong (\rho^*, V^*)$

$\forall y \in V,\ B(x,y)=0 \Rightarrow x=0$

命题：(1) $V \overset{\varphi}{\cong} V^*$ (作为线性空间) $\Longleftrightarrow$ V上存在非退化双线性函数 $B(x,y)$.

(2) $(\rho, V) \overset{\varphi}{\cong} (\rho^*, V^*)$ (作为群表示) $\Longleftrightarrow$ V上存在非退化 G-不变双线性函数 $B(x,y)$

$\varphi \cdot \rho(g) = \rho^*(g) \cdot \varphi$　　　$B(\rho(g)x, \rho(g)y) = B(x,y)$

证：$\underbrace{\varphi(x)}_{V^*}(\underbrace{y}_{V}) := B(x,y)$　　φ是同构 $\Longleftrightarrow$ $B(x,y)$是非退化的

$\underbrace{\rho^*(g)(\underbrace{\varphi(x)}_{V^*})}_{V^*}(\underbrace{y}_{V}) = \underbrace{\varphi(\underbrace{\rho(g)x}_{V})}_{V^*}(\underbrace{y}_{V}) \Longleftrightarrow B(\rho(g)x, y) = B(x, \rho(g^{-1})y)$

命题. 设 (ρ, V) 是复不可约表示.

(1). V上非零G-不变双线性函数是非退化的. (考虑 $K=\{x \mid B(x,y)=0.\ \forall y \in V\}$ + Schur引理.

(2). 非退化 G-不变双线性函数在差常数倍的意义下是唯一的. $B_1(x,y) = c B_2(x,y)$. $c \in \mathbb{C}$.

$V \xrightarrow[B_1]{\varphi} V^* \xrightarrow[B_2]{\varphi^{-1}} V$

Schur引理. φ是差常数倍唯一

(3). 非退化 G-不变双线性函数是对称或反对称的. $B(x,y) = cB(y,x) = c^2 B(x,y)$. $c^2=1$. $c=\pm 1$

$B(x,y)=B(y,x)$　　$B(x,y)=-B(y,x)$

定理：设 (ρ, V) 是复不可约表示.

(1). $\rho \not\cong \rho^*$，则 ρ 不能在 $\mathbb{R}$ 上实现. $\longrightarrow \rho(g) \in U(n, \mathbb{C})$

(2). V 上有非退化 G-不变反对称双线性函数，则 ρ 不能在 $\mathbb{R}$ 上实现. $\longrightarrow \rho(g) \in Sp(n, \mathbb{C})$ $\quad \overline{\rho(g)} J = J \rho(g)$, $J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$

(3). V 上有非退化 G-不变对称双线性函数 $\Longleftrightarrow \rho$ 能在 $\mathbb{R}$ 上实现. $\longrightarrow \rho(g) \in O(n, \mathbb{R})$

证：$\rho \cong \rho^*$ $\quad$ V 上有非退化 G-不变双线性函数 $B(x, y)$. $B(x, ky) = k B(x, y)$. $\quad$ V 上有 G-不变内积 $\langle x, y \rangle$.
$\langle x, ky \rangle = \bar{k} \langle x, y \rangle$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, $\langle x, x \rangle \geq 0$

令 $\tau' : V \to V$ 满足 $B(x, y) = \langle x, \tau'(y) \rangle$. 把 τ' 修正为 $\tau : V \to V$，满足 τ 是反线性的 $\tau(cx) = \bar{c} \tau(x)$，$G$-不变 $\tau \cdot \rho(g) = \rho(g) \cdot \tau$.
$\tau = k \cdot \tau'$ $\quad$ $\tau^2 = \varepsilon \cdot id_V$.

$B(x, y)$ 是对称的 $\Rightarrow \tau^2 = id_V$. τ 是 V 的共轭. $\quad$ $B(x, y)$ 是反对称 $\Rightarrow \tau^2 = -id_V$.

$B(x, y)$ 是对称的. $V_0 = \{\tau$ 的不动点$\}$. $\quad \tau \cdot \rho(g) = \rho(g) \cdot \tau \Rightarrow V_0$ 是 G-不变子空间. $\rho(g) \in GL(V_0)$ 是实矩阵.

反之. ρ 能在 $\mathbb{R}$ 上实现，则 V 有一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$. $\rho(g) \in GL(n, \mathbb{R})$. $V_0 = \{e_1, \cdots, e_n$ 的实线性组合$\}$.

V_0 上有内积 $B(x, y)$ 双线性函数 $\quad$ 把 $B(x, y)$ 扩充到 V 上. 得 $\hat{B}(\sum a_i e_i, \sum b_j e_j) := \sum a_i b_j B(e_i, e_j)$. $\quad a_i, b_j \in \mathbb{C}$

$\hat{B}(x, y)$ 是 V 上的非退化 G-不变对称双线性函数.

命题：设 (ρ, V) 是复不可约表示　　$V = V_0 \oplus \sqrt{-1}V_0$

(1). ρ 能在实数上实现．　(ρ, V) 有实形 V_0．　$\mathrm{Hom}_G(V_0, V_0) \cong \mathbb{R}$．　实数型

(2) ρ 不能在 $\mathbb{R}$ 上实现．$\rho \not\cong \rho^*$　$(\rho_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$ 是实不可约的．　$\mathrm{Hom}_G(V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{C}$　复数型

(3) ρ 不能在 $\mathbb{R}$ 上实现．$\rho \cong \rho^*$　$(\rho_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$ 是实不可约的．　$\mathrm{Hom}_G(V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{H}$　四元数型

证：$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_G(V_0, V_0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V_0^{\mathbb{C}}, V_0^{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V, V) = 1$

复空间 V 的基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$；　实空间 $V_{\mathbb{R}}$ 的基 $\{e_1, \cdots, e_n, \sqrt{-1}e_1, \cdots, \sqrt{-1}e_n\}$.

$$\rho(g) \in GL(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \rho_{\mathbb{R}}(g) = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}.$$

$\rho(g) = [c_{ij}] = C$

$C = \underset{GL(n,\mathbb{R})}{\overset{\cap}{A}} + \sqrt{-1}\,\underset{GL(n,\mathbb{R})}{\overset{\cap}{B}}$

$$\chi_{\rho_{\mathbb{R}}}(g) = 2\,\mathrm{tr}A = \chi_\rho(g) + \overline{\chi_\rho(g)} = \chi_\rho(g) + \chi_{\rho^*}(g)$$

$$(\rho_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = \rho \oplus \rho^*$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_G(V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G((V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}, (V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\rho \oplus \rho^*, \rho \oplus \rho^*) = \begin{cases} 2 & \rho \not\cong \rho^* \\ 4 & \rho \cong \rho^* \end{cases}$$

用特征标来确定 G-不变双线性函数存在性.

设 (ρ, V) 是复不可约表示.

$$\left(\rho_{(V\otimes V)^*}(g)B\right)(x,y) = B(\rho(g^{-1})x,\ \rho(g^{-1})y)$$

双线性函数空间 $= (V\otimes V)^*$

G-不变双线性函数空间 $\left(\frac{1}{|G|}\sum_g \rho_{(V\otimes V)^*}(g)\right)\left((V\otimes V)^*\right)$. $\dim = \frac{1}{|G|}\sum_g \chi_{(V\otimes V)^*}(g)$

投影算子

双称双线性函数空间 $= (S^2V)^*$.

G-不变对称双线性函数空间 $\left(\frac{1}{|G|}\sum_g \rho_{(V\otimes V)^*}(g)\right)\left((S^2V)^*\right)$. $\dim = \sum_g \frac{1}{2}(\chi(g)^2 + \chi(g^2))$

(练习)

$$S^2V = \mathrm{span}\{e_i\otimes e_i,\ e_i\otimes e_j + e_j\otimes e_i\}$$

反对称双线性函数空间 $= (\Lambda^2 V)^*$

G-不变反对称双线性函数空间 $\left(\frac{1}{|G|}\sum_g \rho_{(V\otimes V)^*}(g)\right)\left((\Lambda^2 V)^*\right)$ $\dim = \sum_g \frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2))$

(练习).

$$\Lambda^2 V = \mathrm{span}\{e_i\otimes e_j - e_j\otimes e_i\}$$

V … $\rho(g)$ 特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$

$V\otimes V$ … $\rho\otimes\rho(g)$ $\lambda_i\lambda_j$

$S^2\Lambda$ g 作用特征值 $\lambda_i\lambda_j$ $i\le j$ 求 $\sum_{i\le j}\lambda_i\lambda_j$ 和 $\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j$

$\Lambda^2\Lambda$ $\lambda_i\lambda_j$ $i<j$

定义 (Frobenius-Schur 指数)

$$S(\rho) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^2) = \frac{1}{|G|}\sum_g \frac{1}{2}\left(\chi(g)^2+\chi(g^2)\right) - \frac{1}{|G|}\sum_g \frac{1}{2}\left(\chi(g)^2-\chi(g^2)\right)$$

$= \dim\{G\text{-不变对称双线性函数}\} - \dim\{G\text{-不变反对称双线性函数}\}$

$$= \begin{cases} 1-0=1 & \text{存在非退化}G\text{-不变对称双线性函数} \quad \text{实数型} \\ 0-0=0 & \text{不存在非退化}G\text{-不变双线性函数} \quad \text{复数型} \\ 0-1=-1 & \text{存在非退化}G\text{-不变反对称双线性函数} \quad \text{四元数型} \end{cases}$$

例. D_4. 2维不可约表示.

$\{1\}$	$\{b^2\}$	$\{b, b^3\}$	$\{a, ab^2\}$	$\{ab, ab^3\}$
2	-2	0	0	0

$S(\rho)=1$. ρ 能在 $\mathbb{R}$ 上实现.

例. Q_8 2维不可约表示,

$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{\pm i\}$	$\{\pm j\}$	$\{\pm k\}$
2	-2	0	0	0

$S(\rho)=-1$ ρ 不能在 $\mathbb{R}$ 上实现.

作业5. 下周三交.

报告 考试周最后一天.