诱导表示

设 H 是 G 的子群. (θ, W) 是 H 的表示. 诱导表示 $(\mathrm{Ind}_H^G\theta, \mathrm{Ind}_H^G W)$ 的表示空间为 $\mathrm{Ind}_H^G W = \mathbb{F}G \underset{\mathbb{F}H}{\otimes} W$

$gh\otimes w = g\otimes hw$

群作用为 $\mathrm{Ind}_H^G\theta(g)(g_1\otimes w) = gg_1\otimes w$

记 $V = \mathrm{Ind}_H^G W$. $V = \bigoplus g_iW$, g_i 是 H 的左陪集代表元 $g_iW := g_i\otimes W$

H 的表示 $W \rightsquigarrow G$ 的表示: $\sum\limits_{g\in G} g\otimes W = \bigoplus\limits_{g_i} g_iW$ 推了 G 在 G/H 上的置换 $g_iH \to gg_iH$

$g_iW \to gg_iW$

互反律. $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G W, U) \cong \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G U)$. U 是 G 的表示.

$\mathrm{Ind}_H^G: \mathrm{Rep}H \to \mathrm{Rep}G$ 和 $\mathrm{Res}_H^G: \mathrm{Rep}G \to \mathrm{Rep}H$ 互为伴随.

(θ, W) 是 H 的表示，$\mathrm{Ind}_H^G W$ 是不是 G 的不可约表示？ 即：$(\mathrm{Ind}_H^G W, \mathrm{Ind}_H^G W)_G \overset{\text{特征标}}{=} 1$ ？

$$(\mathrm{Ind}_H^G W, \mathrm{Ind}_H^G W)_G \overset{\text{互反律}}{=} (W, \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_H^G W)_H = 1 \ ?$$

研究 $\mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_H^G W$，$V = \mathrm{Ind}_H^G W = g_1 W \oplus \cdots \oplus g_m W$　　g_i 是 H 左陪集代表元。 $g_i H h = g_i H$

看 $\mathrm{Res}_H^G (\oplus g_i W)$，$g_i W$ 不一定是 H 的不变子空间。　$h g_i = g_j h_1$　　$h g_i H = g_j H$

$\sum\limits_{h \in H} h g_i W$ 是 V 的 H-不变子空间，$\sum\limits_{h \in H} h g_i W = \sum\limits_{h, h' \in H} h g_i h' W = H t H W$　　$t \in G$.

$HtH = \{ h_1 t h_2 \mid t_1 \in H, t_2 \in H \}$ 称为 t 的双陪集。　$G = \underset{\text{不交并}}{\coprod} HtH$.

G 的双陪集 $Ht_1H, \cdots, Ht_rH$ 的集合记为 $H \backslash G / H$

例：$H = S_2 \subseteq S_3$　　$S_3 = H \cup H(23)H$

例．$GL_2(2, \underset{\mathbb{F}}{\mathbb{C}}) = B \sqcup \underbrace{B \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B}_{LU\text{ 分解}}$.

上三角矩阵

B 是 $GL(2, \mathbb{C})$ 的子群.

令 $V_t = \sum\limits_{x\in HtH} xW \quad \left(=\sum\limits_{h\in H} h g_i W\right)$ 则 $\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G W) = V = \bigoplus\limits_{\bar{t}\in H\backslash G/H} V_t$

$$V_t = \sum_{\substack{x\in HtH \\ x=hth_1}} xW = \sum_{h\in H} \underline{htW} \qquad htW = tW \iff ht = th_1 \iff h = th_1t^{-1} \in tHt^{-1}$$

令 $H_t = tHt^{-1}\cap H$ 是 H 的子群: tW 是 H_t 的不变子空间. $V_t = \sum\limits_{h\in H} htW = \bigoplus\limits_{\bar{h}\in H/H_t} htW = \mathrm{Ind}_{H_t}^H tW$

H_t 作用在 tW 上 可以拉回到 W 上

$$\begin{tikzcd} tW \arrow[r, "x\in H_t"] & tW \\ W \arrow[u, "t"] \arrow[r, "t^{-1}xt"'] & W \arrow[u, "t"'] \end{tikzcd}$$

即定义 $\theta_t : H_t \to GL(W)$.

$x \mapsto \theta_t(x) = t^{-1}xt$

$V_t \cong \mathrm{Ind}_{H_t}^H \theta_t$. 则 $\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G W) = \bigoplus\limits_{\bar{t}\in H\backslash G/H} \mathrm{Ind}_{H_t}^H \theta_t$

$$(\mathrm{Ind}_H^G W,\ \mathrm{Ind}_H^G W)_G = (W,\ \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_H^G W)_H = (W,\ \bigoplus_{t\in H\backslash G/H} \mathrm{Ind}_{H_t}^H \theta_t)_H$$

$$= \sum_{t\in H\backslash G/H} (W,\ \mathrm{Ind}_{H_t}^H \theta_t)_H = \sum_{t\in H\backslash G/H} (\mathrm{Res}_{H_t}^H W,\ \theta_t)_{H_t}$$

$$= \underset{\substack{t\in H,\\ H_t=H,\ \theta_t=\theta}}{(\theta,\ \theta)_H} + \sum_{t\notin H} (\mathrm{Res}_{H_t}^H W,\ \theta_t)_{H_t}$$

定理 (Mackey 判据). $\mathrm{Ind}_H^G\theta$ 不可约 $\Longleftrightarrow$ θ 不可约 且 $(\mathrm{Res}_{H_t}^H W,\ \theta_t)=0$，对 $\forall t\notin H$.

推论. H 是 G 的正规子群. (即 $\forall t$, $H_t=H$)， $\mathrm{Ind}_H^G\theta$ 不可约 $\Longleftrightarrow$ θ 不可约 且 对 $t\notin H$， θ_t 与 θ 不同构.

例: S_3 的循环子群 H. $\langle a,b \mid a^2=1,\ b^3=1,\ aba=b^2\rangle$ $\langle b \mid b^3=1\rangle$

H 的三个不可约表示 (θ_1,W_1) (θ_2,W_2), (θ_3,W_3) 来表示.

则: $\mathrm{Ind}\,W_1$ 是可约的. $(\theta_1)_a=\theta_1$

$\mathrm{Ind}\,W_2$, $\mathrm{Ind}\,W_3$ 是不可约的.

$(\theta_2)_a=\theta_3$ $(\theta_3)_a=\theta_2$

实表示、与复表示.

实线性空间、复线性空间.

设 V 是复 n 维线性空间. $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一组基. $V=\{c_1e_1+\cdots+c_ne_n \mid c_i\in\mathbb{C}\}$

V 可以看成一个实线性空间. $\sum_i c_ie_i=\sum_i(a_i+b_i\sqrt{-1})e_i=\sum_i a_ie_i+\sum_i b_i\sqrt{-1}e_i$

V 是 $2n$ 维实线性空间. 基为 $\{e_1,\cdots,e_n,\sqrt{-1}e_1,\cdots,\sqrt{-1}e_n\}$. 记这个实线性空间为 $V_{\mathbb{R}}$. (作为集合 $V_{\mathbb{R}}=V$)

$V_0=\{a_1e_1+\cdots+a_ne_n \mid a_i\in\mathbb{R}\}$ 是 $V_{\mathbb{R}}$ 的 n 维子空间. 且. $V=V_0\oplus\sqrt{-1}V_0$

V_0 称为 V 的一个实形 (这个定义依赖于基的选取).

$\tau: V\to V$ 称为 V 的共轭. 如果. $\tau(x+y)=\tau(x)+\tau(y)$, $\tau(cx)=\bar{c}\tau(x)$, $\forall c\in\mathbb{C}$. $\tau^2(x)=x$

引理: 复线性空间的实形与共轭一一对应. (练习).

$V_0 \xrightarrow[\tau]{} \sqrt{-1}V_0$ $\qquad$ τ 的特征值 1 的特征子空间.

设 W 是实线性空间（$\mathbb{R}$-模）. $W^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W$ 称为 W 的复化，（把 $\mathbb{R}$ 看成 $\mathbb{C}$ 的子群. $W^{\mathbb{C}}$ 是 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} W$）

$W^{\mathbb{C}}$ 是复线性空间. 一组基为 $\{1\otimes e_1, \cdots, 1\otimes e_n\}$. 其中 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 W 的一组基. $\dim_{\mathbb{C}} W^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} W$

$$z(c\otimes w) = zc\otimes w \quad \forall z, c \in \mathbb{C},\ w \in W.$$

命题：V 是复线性空间. W 是实线性空间. V_0 是 V 的一个实形.

$$(V_0)^{\mathbb{C}} \cong V. \quad (W^{\mathbb{C}})_0 \cong W$$

V $e_1, \cdots, e_n$ W. $e_1, \cdots, e_n$

$\downarrow$ $W^{\mathbb{C}}$ $1\otimes e_1, \cdots, 1\otimes e_n$

V_0 $e_1, \cdots, e_n$ $W^{\mathbb{C}}_0$ $1\otimes e_1, \cdots, 1\otimes e_n$

$V_0^{\mathbb{C}}$ $1\otimes e_1, \cdots, 1\otimes e_n$

命题：设 W_1 和 W_2 是实线性空间. 则. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W_1, W_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W_1^{\mathbb{C}}, W_2^{\mathbb{C}})$

$$T: W_1^{\mathbb{C}} \to W_2^{\mathbb{C}}$$

$$T = \underset{\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W_1, W_2)}{\underset{\cap}{T_1}} + \sqrt{-1}\, \underset{\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W_1, W_2)}{\underset{\cap}{T_2}}$$

实表示的复化.

设 (ρ_0, V_0) 是 G 的实表示. 即 $\rho_0: G \to GL(V_0)$ $\rho_0(g) \in GL(n, \mathbb{R})$.

$V_0^{\mathbb{C}}$ 是 V_0 的复化. $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V_0 的基. $\{1\otimes e_1, \cdots, 1\otimes e_n\}$ 是 $V_0^{\mathbb{C}}$ 的基.

设 $\rho_0(g)(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. 定义 $\rho(g) \in GL(V_0^{\mathbb{C}})$, $\rho(g)(1\otimes e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(1\otimes e_i)$

$(\rho, V_0^{\mathbb{C}})$ 是 G 的复表示. 特征标: $\chi_{V_0^{\mathbb{C}}} = \chi_{V_0}$

一般地. (ρ_0, V_0) 是不可约实表示. $(\rho, V_0^{\mathbb{C}})$ 可能变成可约的.

例. $G = \langle g \mid g^3 = 1 \rangle$. $\rho_0(g) = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix}$ $V_0 = \mathbb{R}^2$.

$V_0^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$. $\rho(g) = \rho_0(g)$ 作为复表示是可约的. $\rho(g)$ 复共轭于 $\begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & \\ & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{bmatrix}$. 即 ρ 分解为2个1维的不可约表示直和.

$(\chi_0, \chi_0) = 2$

例. $G = Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, $V_0 = \mathbb{R}^4$. $\rho_0(i) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\rho_0(j) = \begin{bmatrix} & & -1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{bmatrix}$

$V_0^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^4$. 由于 Q_8 没有4维复不可约表示. ρ_0 的复化 ρ 是可约的.

$(\chi_0, \chi_0) = 4$. $\Rightarrow$ $V_0^{\mathbb{C}} = W \oplus W$. W 是 Q_8 的2维复不可约表示.

定理 (Frobenius-Schur). 设 (ρ_0, V_0) 是 G 的不可约实表示, 特征标为 χ_0. 则 $(\chi_0, \chi_0) = 1, 2$ 或 4.

实数型 (1). 若 $(\chi_0, \chi_0) = 1$. 则 $(\rho, V_0^{\mathbb{C}})$ 是不可约复表示.

复数型 (2). 若 $(\chi_0, \chi_0) = 2$ 则 $V_0^{\mathbb{C}} \cong W \oplus W^*$ 其中 W, W^* 是不可约复表示 且 $W \not\cong W^*$

($(\chi_0, \chi_0) = (\chi_W + \chi_{W^*}, \chi_W + \chi_{W^*}) = (\chi_W, \chi_W) + 2(\chi_W, \chi_{W^*}) + (\chi_{W^*}, \chi_{W^*})$

四元数型 (3). 若 $(\chi_0, \chi_0) = 4$ 则 $V_0^{\mathbb{C}} \cong W \oplus W$. 其中 W 是不可约复表示

$\rho_0(g) \in GL(n, \mathbb{R})$
$\Downarrow$
$\rho(g) \in GL(n, \mathbb{C})$

$\rho(g) \sim \begin{cases} \rho_0(g) \\ \begin{bmatrix} \rho_W(g) & \\ & \rho_{W^*}(g) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \rho_W(g) & \\ & \rho_W(g) \end{bmatrix} \end{cases}$

证明思路. 考虑 $V_0^{\mathbb{C}}$ 的一个共轭 τ. 若 W 是 $V_0^{\mathbb{C}}$ 的不可约不变子空间. 则 $W^* := \tau(W)$ 也是不可约不变子空间.

$W + W^*$ 是不变子空间

$V_0^{\mathbb{C}} \cong \begin{cases} W \\ W \oplus W^* & W \not\cong W^* \\ W \oplus W \end{cases}$