对称群表示理论

2022-2023 学期有限群表示论读书报告

任课教师： 常　亮

学生姓名： 苏可铮

学生学号： 2012604

学生学院： 数学科学学院

摘要

本文是南开大学 2022-2023 秋季学期有限群表示论课程的结课读书报告，本文选择的是“叙述并证明关于对称群不可约表示特征标的 Frobenius 公式”

在本文中，我们不仅局限于关于 Frobenius 公式的讨论，而是扩展到对整个对称群 S_n 的表示理论的讨论.

首先, 我们简单介绍了划分的概念, 并且对于对称群 S_n 的共轭类的性质进行了简单的介绍, 同时引出了刻画对称群 S_n 和其群代数 $\mathbb{F}S_n$ 的工具: 杨图和杨表; 紧接着, 我们对于全文的主定理进行了证明, 并且通过 Specht 模对 S_n 的所有表示进行了剖析; 之后, 我们对于表示的维数和表示的特征标的计算进行了讨论, 同时, 我们介绍了对称群表示的限制和提升. 最后, 我们通过具体 S_3 的例子来简单回顾一下我们整个讨论过程.

关键词： Frobenius 公式，对称群，群表示

目录

第一章 引言

设 n 是一个正整数, S_n 是 n 元对称群, $\mathbb{F}S_n$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的群代数, 当域 $\mathbb{F}$ 的特征为 0 或大于 n, 则群代数 $\mathbb{F}S_n$ 的任意表示都是半单的, 这个结论由 Maschke 在 1899 年得出的 Maschke 定理可以推得. 任何有限群都可以是对称群的子群, 因此, 任何有限群的表示都可以是对称群的表示的子表示, 因此研究对称群的表示至关重要. 而 $\mathbb{F}S_n$ 的表示理论在 1900 年被 Alfred Young 发现, 之后又被多人所改进. 这篇文章对于杨图和杨表的概念做了基本介绍, 并且利用置换模和 Specht 模对于 S_n 的表示和不可约表示进行了解析, 并分析了其性质如表示维数, 特征标, 表示的提升与限制等, 此文主定理的证明主要参考了 [1] 和 [2]. 而对于表示维数的计算两个公式, 分别参考了 [3] 和 [2], 对于特征标的计算公式 Frobenius 公式, 参考了 [6], 最后关于 S_n 表示的提升和限制的相关内容参考并总结了 [5] 和 [2] 中的描述. 由于关于维数和特征标计算的证明和 Branching 法则的证明过于繁琐且与表示论本身关联不大, 此文没有叙述, 但是在以上参考文献中都有证明的详细过程.

第二章　基础知识与定义

首先我们在引入具体的定理之前, 介绍所需要的概念和工具.

2.1　划分

定义 1 (划分). 正整数 n 的一个划分 *(partition)* 是指一个正整数数组 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l)$, 满足 $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_l$, 其中每个 λ_i 均为正整数, 并且 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_l$, 记作 $\lambda \vdash n$. 这里 l 称为这个划分的长, 用 $P(n)$ 表示 n 划分的方法数.

例 1. $n = 4$ 有五种划分的方法:(4), $(3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1)$.

定义 2 (划分的控制). 设 λ, μ 是 n 的两个划分, 我们称 λ 控制 μ, 并记作 $\lambda \triangleleft \mu$, 如果

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k \geq \mu_1 + \cdots + \mu_k$$

对于任意的 k 成立.

2.2　对称群的共轭类

定义 3 (置换的型). S_n 为 n 元对称群, 则对于任意的 $\sigma \in S_n, \sigma$ 可以唯一地写成若干个没有公共元素的积, 其中长为 r 的轮换共有 λ_r 个, 则称置换 σ 的型为 $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}$

定理 1. 对称群 S_n 中两个置换共轭的充要条件是它们有相同的型.

证明. 设 σ 和 σ' 是 S_n 中的两个置换, 如果 σ 和 σ' 共轭, 则存在 $\tau \in S_n$, 使得 $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$, 将 σ 表示成无公共元素的轮换的积:

$$\sigma = (ab \cdots c) \cdots (\alpha\beta \cdots \gamma)$$

则

$$\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a)\tau(b) \cdots \tau(c)) \cdots (\tau(\alpha)\tau(\beta) \cdots \tau(\gamma))$$

这是因为

$$\left(\tau\sigma\tau^{-1}\right)(\tau(a)) = (\tau\sigma)(a) = \tau(\sigma(a)) = \tau(b)$$

即当 σ 把 a 变成 b 时, $\tau\sigma\tau^{-1}$ 把 $\tau(a)$ 变成 $\tau(b)$, 于是 σ' 和 σ 有相同的型. 现设 σ 和 σ' 有相同的型: $\sigma = (ab\cdots c)\cdots(\alpha\beta\cdots\gamma), \sigma' = (a'b'\cdots c')\cdots(\alpha'\beta'\cdots\gamma')$. 令

$$\tau = \begin{pmatrix} ab\cdots c\cdots\alpha\beta\cdots\gamma \\ a'b'\cdots c'\cdots\alpha'\beta'\cdots\gamma' \end{pmatrix}$$

则 $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma'$ □

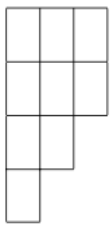
推论 1. *S_n 中共轭类的个数等于 n 的划分的个数.*

2.3 杨图与杨表

杨图与杨表的概念在 1900 年被 Alfred Young 所提出, 并用于研究对称群的群表示.

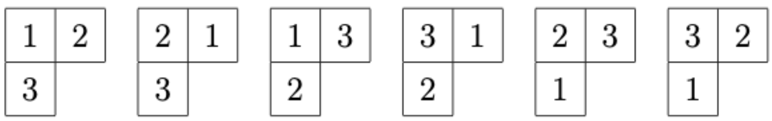
定义 4 (杨图)**.** *一个杨图 (Young diagram) 指的是有限多个方格按行左对齐排列, 并且每一行方格的数量都是非严格单调递减的, 已知每一个杨图对应了一个划分, 其中 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l)$ 对应的杨图为一共 l 行, 并且第 i 行有 λ_i 个方格的杨图, 称其为 λ 型杨图.*

例 2. *对于一个划分 $\lambda = (3,3,2,1), \lambda$ 型杨图如下所示:*



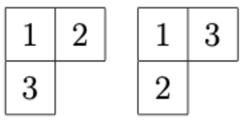
定义 5 (杨表)**.** *一个杨表 (Young tableau), 指的是将 $1,\cdots,n$ 这 n 个数不重复且不遗漏填入一个杨图中所获得的表, 其中 n 指杨图中方格的个数. 设 $\lambda \vdash n$, 则 λ 型杨图填充 n 个数所得的所有表称为 λ 型杨表.*

例 3. *如对于划分 $(2,1)$, 一共有 6 中杨表*



定义 6 (标准杨表)**.** *一个杨表被称为标准杨表, 如果杨表中每一行和每一列的数字都是递增的. 我们将一个 λ 型杨图所含的 λ 型标准杨表的个数记为 f^λ.*

例 4. *如对于划分 $(2,1)$, 标准杨表只有以下 2 种.*



2.4 置换模和 Specht 模

定义 7 (置换模). 设 $\lambda \vdash n$, 记 M^λ 为一个以 λ 型杨表的行等价类为基的向量空间, 则 S_n 中的元素在 M^λ 上有一个自然的作用, 则称 M^λ 为置换模, 是 S_n 的一个表示.

定义 8 (行群). 设 $\lambda \vdash n$, 对于称为 λ 型杨表 t, 可以定义它的行群 R_t :

$$R_t = \{\sigma \in S_n : \sigma \text{ 保持} t \text{ 的每行元素不变}\}$$

同样的, 我们可以定义一个杨表的列群:

定义 9 (列群). 设 $\lambda \vdash n$, 对于称为 λ 型杨表 t, 可以定义它的列群 C_t :

$$C_t = \{\sigma \in S_n : \sigma \text{ 保持} t \text{ 的每列元素不变}\}$$

容易知道 S_n 中的元素对于所有行等价类的集合有一个自然的作用, 对于所有列等价类的集合也有一个自然的作用.

定义 10 (行等价类). 我们说两个 λ 型杨表 t_1 和 t_2 行等价, 如果这两个杨表的对应的每行都包含相同的元素, 记为 $t_1 \sim t_2$. 容易知道这是一种等价关系, 记 $\{t\}$ 为 t 所处的等价类, 即 $\{t\} = \{t' \mid t' \sim t\}$

例 5. 若划分为 $\lambda = (n)$, 则杨表只有一种行等价类为:

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline \end{array}$$

其对应的表示为一维的, 其基在所有 S_n 中所有的元素作用下不变. 因此 M^λ 为单位表示.

例 6. 若划分为 $\lambda = (1^n)$, 则杨表有 $n\,!$ 种行等价类, 而每个行等价类可以与 S_n 中的元素一一对应, 因此易知 M^λ 为正则表示.

接下来区别于置换模, 可以定义一个杨表的列交错和 Specht 模的概念.

定义 11 (列交错和). 设 $\lambda \vdash n$, 对于称为 λ 型杨表 t, 可以定义它的列交错和, 记为 e_t :

$$e_t = \sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t\}$$

其中 $\operatorname{sgn}(\sigma)$ 表示置换的符号: 即若 σ 是 S_n 中的奇置换, 则 $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$; 若 σ 是 S_n 中的偶置换, 则 $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$.$\sigma\{t\}$ 表示 σ 自然作用在行等价类 $\{t\}$ 上所得新的行等价类.

性质 1. 容易知道, 当 σ 取遍 C_t 时, $\{\sigma(t)\}$ 恰好不重复地取遍所有的行等价类, 因此

$$|C_t| = \lambda \text{ 型杨表中行等价类的个数}$$

引理 1. 设 t 是一个杨表, π 是一个置换, 则 $e_{\pi t} = \pi e_t$.

证明. 首先由和之前类似的讨论, 容易计算 $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$. 因此, 可以得到

$$\begin{aligned} e_{\pi t} &= \sum_{\sigma \in C_{\pi t}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{\pi t\} \\ &= \sum_{\sigma \in \pi C_t \pi^{-1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{\pi t\} \\ &= \sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}\left(\pi\sigma'\pi^{-1}\right)\pi\sigma'\pi^{-1}\{\pi t\} \\ &= \pi \sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}\left(\sigma'\right)\sigma'\{t\} \\ &= \pi e_t \end{aligned}$$

□

接下来我们可以通过以上引理从置换模的表示中提取对称群的不可约表示.

定义 12 (Specht 模)**.** 对于一个划分 λ, 其对应的 *Specht* 模, 记为 S^λ, 是一个 M^λ 中由所有 e_t 张成的子模, 其中 t 取遍所有的 λ 型杨表的列置换和.

例 7. 若划分为 $\lambda = (n)$, 则只有一种标准杨表为

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline \end{array}$$

因此其对应的表示为一维的, 且 $C_t = (1)$, 因此 $e_t = t$, 同时其只有一个行等价类, 因此 e_t 在所有 S_n 中所有的元素作用下不变. 其对应为单位表示.

例 8. 若划分为 $\lambda = (1^n)$, 则也只有一种标准杨表为

$$t = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}$$

在 S_n 的作用下一共有 n ! 中行等价类, 因此, 则 e_t 为所有带符号的行等价类的和, 其中符号为该行等价类相对于 t 的置换的符号. 因此对于任意的 $\sigma \in S_n, \sigma e_t = \operatorname{sgn}(\sigma) e_t$. 由此可知 t 所对应的表示为符号表示, 即将所有的奇置换映射成 -1, 将所有的偶置换映射成 *1* .

第三章 S_n 的不可约表示

接下来的步骤, 我们就要证明: 对于每一个划分 λ, 其 Specht 模是 S_n 的一种不可约表示. 并且对于不同的划分, S^λ 互不同构, 且任何一种 S_n 的不可约, 都有一个划分 λ, 使得该表示同构于 S^λ. 这是一个强大的定理, 它完全阐释出了对称群 S_n 所有不重复的结构, 而我们接下来分成以下步骤来证明.

3.1 杨表的行列性质

引理 2. 设 λ, μ 是 n 的两个划分, t 是一个 λ 型杨表, t' 是一个 μ 型杨表, 若对于任意的 i, t' 的第 i 行的所有数字出现在 t 的不同的列中, 则 $\lambda \trianglelefteq \mu$

证明. 我们可以按照以下步骤重新排列杨表中的数字

1. 使用 C_t 将 t' 第一行的所有出现数字在 t 中移动到第一行中, 因此我们有 $\lambda_1 \geq \mu_1$
2. 使用 C_t 将 t' 第二行的所有出现数字在 t 中移动到第二行中, 因此我们有 $\lambda_1+\lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2$

以这种方式继续操作, 我们可以得到相应的结果 □

引理 3. 设 λ, μ 是 n 的两个划分, t 是一个 λ 型杨表, t' 是一个 μ 型杨表, 若

$$\sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma \{t'\} \neq 0$$

则 $\lambda \trianglelefteq \mu$, 并且若 $\lambda = \mu$, 则

$$\sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma \{t'\} = \pm e_t$$

.

证明. 若 a 和 b 是 t' 同一行中的两个数, 则 $(ab)\{t'\} = \{t'\}$. 因此 a, b 是 t 中不同列的元素, 否则 $(ab) \in C_t$, 则有

$$\sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma \{t'\} = (ab)\sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma \{t'\} = \operatorname{sgn}((ab))\sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma \{t'\} = -\sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma \{t'\}$$

这与 $\sum\limits_{\sigma\in C_t}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t'\}\neq 0$ 矛盾, 因此有，$\lambda\triangleleft\mu$.

若 $\lambda=\mu$, 由上述讨论知 $t'\in C_t t$, 则

$$\sum_{\sigma\in C_t}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t'\}=\pm\sum_{\sigma\in C_t}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t\}=\pm e_t$$

□

推论 2. *给定 $m\in M^\lambda$ 和一个 λ 型杨表 t, 有 $\sum\limits_{\sigma\in C_t}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma m\in\mathbb{F}e_t$.*

证明. 根据定义, m 是 $\{t'\}$ 的线性组合, 其中 t' 是 λ 型杨表. 同时, 我们知道 $\sum\limits_{\sigma\in C_t}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t'\}=0$ 或 $\pm e_t$, 得证 □

3.2 内积空间

定义 13 (M^λ 中内积)**.** *在 M^λ 上可定义对称双线性函数 $\langle -,-\rangle$:*

$$\langle\{t\},\{t'\}\rangle=\delta_{\{t\},\{t'\}}=\begin{cases}1, & \text{若}\{t\}=\{t'\};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

易验证这是一个内积结构, 并且在 S_n 的作用下保持不变.

性质 2. *设 $V\subseteq M^\lambda$ 是一个子表示, 则 $V\supseteq S^\lambda$ 或 $V\subseteq\left(S^\lambda\right)^\perp$.*

证明. 设 $v\in V$, 若 $\sum\limits_{\sigma\in C_t}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma v\neq 0$, 则 $e_t\in V$. 并且由于 e_t 形成了一个 S_n 作用下的单个轨道, 则对于任意的 $t', e_{t'}\in V$. 因此 $S^\lambda\subseteq V$ 否则 $\sum\limits_{\sigma\in C_t}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma v=0$ 对于任意 $v\in V$ 和 t, 我们可以得到

$$0=\left\langle\sum_{\sigma\in C_t}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma v,\{t\}\right\rangle=\left\langle v,\sum_{\sigma\in C_t}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t\}\right\rangle=\langle v,e_t\rangle$$

因此 $v\in\left(S^\lambda\right)^\perp$, 则 $V\subseteq\left(S^\lambda\right)^\perp$. □

3.3 Specht 模与不可约表示

推论 3. *Specht 模 S^λ 是 S_n 的不可约表示.*

证明. 设 $V\subsetneq S^\lambda$ 是一个子表示. 根据 3.5, $V\subseteq\left(S^\lambda\right)^\perp$. 因此

$$V\subseteq S^\lambda\cap\left(S^\lambda\right)^\perp=0$$

因此 S^λ 是不可约表示. $\square$

引理 4. 设 $f: M^\lambda \to M^\mu$ 是一个表示的映射且 $S^\lambda \nsubseteq \ker(f)$, 则 $\lambda \trianglelefteq \mu$, 并且若 $\lambda = \mu$, 则 f_{S_λ} 是一个数乘变换.

证明. 设 t 是一个 λ 型杨表. 若 $e_t \notin \ker(f)$,

$$0 \neq f\left(e_t\right) = f\left(\sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t\}\right) = \sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma f(\{t\})$$

由于 $f\{t\}$ 是 μ 型杨表的线性组合, 根据 3.2, 我们可知 $\lambda \trianglelefteq \mu$.

若 $\lambda = \mu$, 则根据 3.2, $\sum\limits_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma f(\{t\}) \in \mathbb{F}e_t$. 因此 $f\left(e_t\right)$ 是某个 e_t 的数乘倍, 并且由于 S_n 在 e_t 的作用是可迁的, 则一定存在一样的 α, 使得 $f(v) = \alpha v$ 对于任意 $v \in S^\lambda$ 均成立. $\square$

推论 4. 我们有 $M^\lambda = S^\lambda \oplus \left(S^\lambda\right)^\perp$, 并且 $\left(S^\lambda\right)^\perp$ 是一些 $\mu \triangleleft \lambda$ 且 $u \neq \lambda$ 的 $\left(S^\mu\right)^\perp$ 的直和. 并且任何 S_n 的不可约表示均同构于某个 S_λ.

证明. 在这里我们断言当 $S^\lambda \cong S^\mu$, 则 $\lambda = \mu$. 通过对同构的延拓选择 $f: M^\lambda \to M^\mu$, 有下图

$$\begin{tikzcd}
M^\lambda \arrow[r, "f"] & M^\mu \\
S^\lambda \arrow[u] \arrow[r, "\cong"] & S^\mu \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

由 $\lambda \trianglelefteq \mu$, 根据对称性知 $\mu \trianglelefteq \lambda$. 因此 $\lambda = \mu$.

因此由数量关系可知任何 S_n 的不可约表示都是 S^λ.

最后假设 $S^\mu \subseteq \left(S^\lambda\right)^\perp$, 则可以选择 f 为嵌入映射使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
M^\mu \arrow[r, "f"] & M^\lambda \\
S^\mu \arrow[u] \arrow[r] & (S^\lambda)^\perp \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

由 $\mu \trianglelefteq \lambda$, 因此由于 $S^\lambda \cap \left(S^\lambda\right)^\perp = 0$ 知 $\mu \neq \lambda$. $\square$

定理 2. 所有 n 的划分 $\lambda \vdash n$ 对应的 *Specht* 模构成了所有 S_n 的在 $\mathbb{F}$ 上的不可约代数表示. 此证明可以由上面的讨论直接给出.

推论 5. 将 S_n 的表示做线性扩充, 则所有 n 的划分 $\lambda \vdash n$ 对应的 *Specht* 模构成了所有 $\mathbb{F}S_n$ 的不可约代数表示.

定理 3. 设 λ 是一个划分, 则集合

$$\{e_t : t \text{ 是一个标准}\lambda \text{ 型杨表}\}$$

构成了 S^λ 作为向量空间的一组基.

这是一个组合证明, 具体可以参见 [1], 基本方法是利用字典序将所有的标准型进行排列, 然后依次搜索和调整得到任何杨表的行等价类可以写成标准型杨表的行等价类的线性组合.

推论 6. 对于任意一个划分 λ

$$\dim S^\lambda = f^\lambda$$

3.4 Grothendieck 环

为了证明 Frobenius 公式，我们首先考虑全体对称群 S_n 的不可约表示所组成的 Grothendieck 环, 并考虑其上的乘法运算. 对于对称群 S_n 的表示空间 $R(S_n)$ ，显然其在加法下生成 Abel 群, 它们全部加起来，可以构造一个新的加法群 R_S 为:

$$R_S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R(S_n).$$

下面，我们定义 R_S 上的内积 $(\cdot,\cdot)$ 如下

$$\forall \rho_1, \rho_2,\ (\rho_1, \rho_2) = \dim \mathrm{End}(\rho_1, \rho_2)$$

考虑将其线性延拓到全空间. 由对称群 S_n 的外直积 $S_m \times S_n$ 按文字排列嵌入到 S_{m+n} 的加法群 R_S 上，那么我们可以通过定义乘法使 R_S 为结合代数. 即对任意两个共轭类函数 $f \in R(S_m)$, $g \in R(S_n)$, 我们可以定义乘法为

$$f \cdot g = \mathrm{Ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} f \otimes g.$$

则可以看到 R_S 在如此定义的乘法下组成的环，即为对称群链的 Grothendieck 环. 进一步, R_S 也构成一个 Frobenius 代数.

由 Frobenius 的一般理论, 对称群 S_n 的全体复不可约表示的个数与 S_n 的共轭类个数相等. 由于 S_n 的每一个置换均可通过不相交循环置换的乘积表示, 且这些不相交循环置换的长度在共轭作用下不变, 则 S_n 每一个共轭类正好与整数 n 的一个划分对应:

$$n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l,$$

其中循环置换的长度 α_i 按递减 (或递增) 方式排列, 而划分 α 的长度 $l=l(\alpha)$ 即为循环置换的个数. 若记划分中 i 出现的重数为 m_i, 则有

$$n=m_1+2m_2+3m_3+\cdots,\quad m_i\geqslant 0.$$

第四章 勾长公式和 Frobenius 公式

在知道所有的不可约表示的方法后, 接下来就是确定不可约表示的维数和特征标, 在此处就需要用到两个著名的公式勾长公式和 Frobenius 公式, 在不通过杨表写出不可约表示的形状的时候, 直接根据杨图的形状来计算不可约表示的维数和其特征标.

4.1 勾长公式

性质 3. 设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l) \vdash n$ 是一个划分, 则

$$\dim M^\lambda = \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_l!}$$

这是一个简单的组合计数公式, 证明在此处就不再绩述.

由之前的讨论可知，为了计算一个划分对应的不可约表示的维数 $\dim S^\lambda$, 我们只需计算其对应的标准杨表的个数 f^λ.

定理 4. n 是一个正整数, 则

$$\sum_{\lambda \vdash n} \left(f^\lambda\right)^2$$

证明. 在群表示论中, 所有不可约表示维数的平方和等于群的阶, 并且根据 3.12, 这个定理是显然的. □

定义 14. 设 λ 是一个杨图, 则对于每一个图中的方格 u, 我们可以定义一个方格的勾 *(hook):* 这个方格所有正右侧和正下方的方格, 也包括这个方格本身. 对于勾中包含方格的数量, 称为方格 u 的勾长 *(hook-length),* 将其记为 $h_\lambda(u)$.

例 9. 考虑一个划分为 $\lambda = (5, 5, 4, 2, 1)$, 则左下图表示了一个特定方格的勾, 右下图表示了所有方格的勾长

	u	×	×	×
	×			
	×			

9	7	5	4	2
8	6	4	3	1
6	4	2	1	
3	1			
1				

定理 5 (Hook-length 公式). 设 $\lambda \vdash n$ 是一个划分, $h_\lambda(u)$ 是对应杨图方格的勾长, 则

$$\dim S^\lambda = f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{u\in\lambda} h_\lambda(u)}$$

相关证明可参阅 [3].

例 10.

$$\dim S^{(5,5,4,2,1)} = f^{(5,5,4,2,1)} = \frac{17!}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6^2\cdot 5\cdot 4^3\cdot 3^2\cdot 2\cdot 1^5} = 3403400$$

定理 6 (行列式算法公式). 设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l) \vdash n$ 是一个划分, 则

$$\dim S^\lambda = f^\lambda = n!\left|\frac{1}{(\lambda_i - i + j)!}\right|$$

相关证明可参阅 [2].

例 11.

$$\dim S^{(5,5,4,2,1)} = f^{(5,5,4,2,1)} = 17!\begin{vmatrix} \frac{1}{5-1+1} & \frac{1}{5-1+2} & \frac{1}{5-1+3} & \frac{1}{5-1+4} & \frac{1}{5-1+5} \\ \frac{1}{5-2+1} & \frac{1}{5-2+2} & \frac{1}{5-2+3} & \frac{1}{5-2+4} & \frac{1}{5-2+5} \\ \frac{1}{4-3+1} & \frac{1}{4-3+2} & \frac{1}{4-3+3} & \frac{1}{4-3+4} & \frac{1}{4-3+5} \\ \frac{1}{2-4+1} & \frac{1}{2-4+2} & \frac{1}{2-4+3} & \frac{1}{2-4+4} & \frac{1}{2-4+5} \\ \frac{1}{1-5+1} & \frac{1}{1-5+2} & \frac{1}{1-5+3} & \frac{1}{1-5+4} & \frac{1}{1-5+5} \end{vmatrix} = 3403400$$

4.2 Frobenius 公式

Frobenius 通过推广数论中交换群特征标的概念, 引入了有限群的特征标概念, 创造性地利用对称函数方法, 完全确定了对称群的不可约特征标. Frobenius 关于对称群的特征标公式开创了群表示理论, 具有划时代的意义.

定理 7. 设 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l), \mu = (\mu_1, \cdots, \mu_l)$, 是 n 的两个划分, 则 M^λ 的特征标在 S_n 中形为 μ 的共轭类的值为一下多元多项式中 $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_l^{\lambda_l}$ 的系数,

$$\prod_{i=1}^{m}(x_1^{\mu_i} + x_2^{\mu_i} + \cdots + x_l^{\mu_i})$$

定理 8 (Frobenius 公式). 设 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l), \mu = (\mu_1, \cdots, \mu_m)$, 是 n 的两个划分, 则 S^λ 的特征标在 S_n 中形为 μ 的共轭类的值为如下多元多项式中 $x_1^{\lambda_1+l-1}x_2^{\lambda_2+l-2}\cdots x_l^{\lambda_l}$ 的系数,

$$\prod_{1\le i<j\le l}(x_i - x_j)\prod_{i=1}^{m}(x_1^{\mu_i} + x_2^{\mu_i} + \cdots + x_l^{\mu_i})$$

证明 Frobenius 公式的经典方法是使用 Schur-Weyl 对偶，可参见文献 [4]，本文中，我们将选择运用 Grothendieck 环的乘法来导出顶点算子的基本公式, 然后用生成函数的方法来证明 Frobenius 公式，具体过程在下一章中给出.

由之前的讨论我们知道 S_n 的共轭类是由所有对于 n 的划分 $\mathcal{P}_n$ 来刻画的, 因此我们可以把上一节中定义的加群 R_S 进行分次:

$$R_S = \bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}} R_\lambda,$$

其中 $R_\lambda = \{f \in R_S \mid f(C_\lambda) = \mathrm{C}\}, \mathcal{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_n$ 是 n 的划分的集合. 对于任意划分 μ, 定义函数 $\beta_\mu \in R_S$ 为共轭类 C_μ 上取值

$$z_\mu = \prod_{i\geqslant 1} i^{m_i(\mu)} m_i(\mu)!$$

的特征函数, 则函数 β_μ 满足:

$$\beta_\mu(C_\lambda) = \begin{cases} z_\mu, & \lambda = \mu, \\ 0, & \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

特别地, S_n 的一维表示就可以用 β_n 来表示.

有了以上的定义，则 Frobenius 公式的含义即等价为: 所有共轭类函数都可以简单地利用 β_n 的乘积简单表达出来.

下面进一步说明此等价的合理性. 由之前的讨论，对称群 S_n 的一维不可约表示都可以通过一维表示在 Grothendieck 环的乘法下生成. 取 S_n 的平凡表示对应的特征标 χ_n, 由 $\beta_{(n)}$ 为在共轭类 $C_{(n)}$ 上取值 n 的函数, 则其乘法规则如下:

$$\beta_{(m)}\beta_{(n)} = \beta_{(m,n)}.$$

那么, 在 R_S 上考虑其一维表示的整体生成函数为:

$$\chi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n t^n = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_{(i)}}{i} t^i\right).$$

其中指数函数正好是 Bernstein 顶点算子的一半. 则可以运用 Bernstein 顶点算子构造所有的不可约特征标:

$$B(t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_{(i)}^*}{i} t^{-i}\right) \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_{(i)}}{i} t^i\right) = \sum_n B_n t^n.$$

通过引入 Bernstein 顶点算子，则 S_n 一般的不可约特征标便可以通过 $B_{\lambda_1}B_{\lambda_2}\cdots B_{\lambda_l}$ 表示, 即为 Frobenius 公式的顶点算子表达方式.

值得一提的是，Frobenius 特征标公式的本质是——建立了从特征标空间到对称函数环之间的同构映射, 在此映射下, 每一个不可约特征标对应于一个正交 Schur 对称函数, 并且每一个共轭类对应于一个幂积对称函数. 这样, Frobenius 公式便通过这两组对称函数组成的正交基底的转换矩阵系数来计算对称群不可约特征标的数值.

第五章 Frobenius 公式的证明

在证明 Frobenius 公式之前，我们先详细讨论关于对称群 S_n 的特征标和顶点算子的相关结论，进而利用此证明 Frobenius 公式

5.1 对称群的特征标和顶点算子

一般地，我们考虑群 G 的复数域上的 Grothendieck 群 $R(G)$. 作为向量空间, $R(G)$ 是 G 上的复共轭类函数

$$R(G)=\bigoplus_{\pi\in G^*}\mathbb{C}\chi_\pi$$

其中 G^* 为 G 的复单模的集合, χ_π 为不可约模 π 对应的特征标.

则 $R(G)$ 上有对称双线性型:

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}f(x)g\left(x^{-1}\right)=\sum_{C\in G_*}\frac{1}{z_C}f(C)g\left(C^{-1}\right).$$

记 β_C 为共轭类集合 G_* 上的正则化特征类函数，则由之前的讨论有:

$$\beta_C(g)=\begin{cases}z_C, & g\in C,\\ 0, & g\notin C,\end{cases}$$

则 $\{\beta_C\}$ 即构成了向量空间 $R(G)$ 上的一组基, 且有:

$$\langle\beta_C,\beta_{C'}\rangle=\delta_{C^{-1},C'}z_C$$

其中，共轭类 C 的中心化子为 $Z(C)$，其阶数为 $z_C=|G|/|C|=|Z(C)|$. 取 C 的一个代表元 w , 则有 $\beta_C=\beta_w$, 则进一步特征标 χ 可以表为

$$\chi=\sum_{C\in G_*}\frac{1}{z_C}\chi(C)\beta_C=\langle\chi,\boldsymbol{B}\rangle.$$

其中 $\boldsymbol{B}=\sum_C\beta_C$ 代表 G 上以 $R(G)$ 为值的类函数，上式也称为 **Frobenius 对应**.

从子群 H 到 S_n 的诱导特征标 $\beta_C^G\,(m \leqslant n)$ 是

$$\beta_C^G(u) = \frac{1}{|H|} \sum_{s \in S_n} \dot{\beta}_C\left(s^{-1} u s\right),$$

其中 $\dot{\beta}_C$ 是 S_n 上的延拓函数: $\dot{\beta}_C\Big|_H = \beta_C$ 且 $\dot{\beta}_C\left(S_n \backslash H\right) = 0$.

考虑一组群链: $1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant G_2 \leqslant \cdots$ 使得 $G_m \times G_n \hookrightarrow G_{m+n}$. 表示 (加法) 群

$$R_G = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R\left(G_n\right)$$

在我们之前定义的二元乘法下

$$f \cdot g = \operatorname{Ind}_{G_m \times G_n}^{G_{m+n}} f \otimes g, \quad f \in R\left(G_m\right), \quad g \in R\left(G_n\right)$$

构成交换代数. 且 R_G 上的双线性型由 G_n 上的双线性型导出: 如果

$$f = \sum f_n, g = \sum g_n, \quad f_n, g_n \in R\left(G_n\right)$$

那么, $\langle R\left(G_m\right), R\left(G_n\right)\rangle = 0, m \neq n$, 并且 $\langle f, g\rangle = \sum \langle f, g\rangle_{G_n}$.

令 $G_n = S_n$, 则 R_{S_n} 实际上是一个环, 因为此时乘法满足结合律. 记 G_m 和 G_n 的共轭类分别为 C_1 和 C_2, 且 $C_1 \cup C_2$ 为 $C_1 \times C_2 \subset G_m \times G_n$ 在 G_{m+n} 中对应的共轭类. 则有，若对称群 S_m 和 S_n 的两个共轭类对应的划分为 λ 和 μ , $\lambda \cup \mu$ 就是合并 λ 和 μ 所组成的划分. 且由对称群 S_n 组成的群链:

$$R(S) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R\left(S_n\right)$$

为了证明 Frobenius 定理，我们首先证明如下的引理——它说明了定义正则化特征函数 β_C 以及 Frobenius 对应的意义.

引理 5. *设 λ 和 μ 分别是 m 和 n 的两个分析, 则在 $R(S)$ 上有:*

$$\beta_\lambda \cdot \beta_\mu = \beta_{\lambda \cup \mu}.$$

则有 $R(S) = \mathbb{C}\left[\beta_{(1)}, \beta_{(2)}, \beta_{(3)}, \ldots\right]$, 且 $\{\beta_\lambda\}$ 为 $R(S)$ 上的一组线性正交基:

$$\langle \beta_\lambda, \beta_\mu\rangle = z_\lambda \delta_{\lambda, \mu},$$

其中 $z_{\left(1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \cdots\right)} = \prod_{i \geqslant 1} i^{m_i} m_i!$

证明. 首先证明对 $\forall i \in \mathbb{N}$ 和 $\forall m \in \mathbb{Z}^+$ 有:

$$\beta_{(i^m)} = \beta_{(i)}^m.$$

不妨设 $\beta_{(i)}^m$ 的特征函数因子分别对应如下的 m 个互换的 i 阶循环置换:

$$C_1 = (a_1 \cdots a_i), \quad C_2 = (b_1 \cdots b_i), \quad \ldots, \quad C_m = (c_1 \cdots c_i).$$

则计算 $\beta_{(i)}^m$ 在 $C_1 \cdots C_m$ 上的值. 根据诱导特征的性质, 有

$$\begin{aligned}\beta_{(i)}^m (C_1 \cdots C_m) &= \mathrm{Ind}_{S_i \times \cdots \times S_i}^{S_{im}} \beta_{(i)}^{\otimes m} (C_1 \cdots C_m) \\ &= \sum_{r \in S_{im}/S_m \times \cdots \times S_m} \left(\beta_{(i)} \otimes \cdots \otimes \beta_{(i)}\right) \left(r^{-1} C_1 \cdots C_m r\right).\end{aligned}$$

则在共轭作用下有:

$$r^{-1} C_1 \cdots C_m r = \left(r^{-1}(a_1) \cdots r^{-1}(a_i)\right) \cdots \left(r^{-1}(c_1) \cdots r^{-1}(c_i)\right)$$

还是等于 $C_1 \cdots C_m$, 当且仅当作为陪集代表元的 r 对于文字 $1, 2, \ldots, mi$ 的作用, 相当于把 m 个集合

$$\{a_1, \ldots, a_i\}, \{b_1, \ldots, b_i\}, \ldots, \{c_1, \ldots, c_i\}$$

映射到 m 个集合自身:

$$\{a_1, \ldots, a_i\}, \{b_1, \ldots, b_i\}, \ldots, \{c_1, \ldots, c_i\}$$

即

$$\beta_{(i)}^m (C_1 \cdots C_m) = m! \beta_{(i)}(C_1) \cdots \beta_{(i)}(C_m) = \beta_{(i^m)}(C_1 \cdots C_m)$$

正好是 $\beta_{(i^m)}$ 的非平凡数值. 同理可知 $\beta_{(i)}^m$ 在其他的共轭类上取值均为 0

综上我们得到: $\beta_{(i)}^m = \beta_{(i^m)}$

则如果 $\lambda \cap \mu = \emptyset$, 那么有 $\beta_\lambda \cdot \beta_\mu = \beta_{\lambda \cup \mu}$.

则对于由循环类 $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots)$ 确定的一般共轭类, 其规范化特征函数有

$$\beta_{(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots)} = \beta_{(\alpha_1)} \beta_{(\alpha_2)} \beta_{(\alpha_3)} \cdots.$$

$\square$

有了以上的讨论，接下来我们代入对称群 S_n 的表示. 记对称群所有的不可约特征标为 $\chi_\lambda, \lambda \vdash n$.

显然对称群 S_n 的平凡表示即对应于划分 (n), 且其特征标为:

$$\chi_{(n)} = \sum_{\alpha \vdash n} \frac{1}{z_\alpha} \beta_\alpha.$$

利用上面证明的引理的结论，我们知道 $\chi_{(n)}$ 的生成函数有如下形式:

$$\begin{aligned}
\chi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{(n)} t^n &= \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \frac{t^{|\alpha|}}{z_\alpha} \beta_\alpha \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m_1+2m_2+\cdots=n} \frac{t^n}{1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2!} \beta_{(2^{m_1})} \beta_{(2^{m_2})} \cdots \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{t^{i m_i}}{i^{m_i} m_i!} \beta_{(i^{m_i})} \right) \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} \exp\left(\frac{t^i \beta_{(i)}}{i} \right) \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_{(i)}}{i} t^i \right).
\end{aligned}$$

注意到最后一项，即为顶点算子的一半.

同理 S_n 的交错表示 $V_{(1^n)}$ 对应的特征标生成函数在 $R(S)$ 内可以表示为:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{(1^n)} t^n &= \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \frac{\operatorname{sgn}(\alpha)}{z_\alpha} \beta_\alpha t^{|\alpha|} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m_1+2m_2+\cdots=n} \frac{(-1)^{n-m_1-m_2-\cdots}}{1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2!} \beta_{(2^{m_1})} \beta_{(2^{m_2})} \cdots t^n \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{m_i=0}^{\infty} (-1)^{m_i} \frac{(-t)^{i m_i}}{i^{m_i} m_i!} \beta_{(i^{m_i})} \right) = \prod_{i=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(-t)^i \beta_{(i)}}{i} \right) \\
&= \exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_{(i)}}{i} (-t)^i \right) \\
&= S(\chi(-t)).
\end{aligned}$$

对于 $\forall f \in R(S)$, 我们定义 f^* 如下: 如果 $f \in R(G_n)$, 则对 $\forall g \in R(G_m), \forall h \in R(G_{m-n})$, 有

$$\langle f^* g, h \rangle = \langle g, f h \rangle.$$

且有 $\beta_{(n)}^* = n \frac{\partial}{\partial \beta_{(n)}}$. 进而得到以下推论:

推论 7. 作为 $R(S)$ 上的阶化线性算子, $\beta_{(n)}$ 和 $\beta_{(n)}^*$ 分别把 $R(S_m)$ 映到 $R(S_{m\pm n})$ 并且

$$\left[\beta_{(m)}, \beta_{(n)}^*\right] = -m \delta_{m,n} \mathrm{Id}$$

则通过以上我们得到了对称群的特征生成函数，进一步我们要构造 $R(S_n)$ 中对应于不可约特征标的正则基, 为此我们引入顶点算子

$$S(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}S_nt^{-n}=\chi(t)\chi\left(-t^{-1}\right)^*=\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\beta_{(i)}t^i\right)\exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\beta_{(i)}}t^{-i}\right).$$

即这两个顶点算子是通过 S_n 的平凡模乘法而得到的. 显然, $S(t)1=\chi(t)$. 为了方便我们定义对偶顶点算子:

$$S(t)^*=\sum_{n\in\mathbb{Z}}S_n^*t^{-n}=\exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\beta_{(i)}t^i\right)\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\beta_{(i)}}t^{-i}\right)$$

令 $\phi\left(\beta_{(n)}\right)=p_n$ 为 n 次幂积对称函数, 则 ϕ 成为 $R(S)$ 到对称函数环 Λ 的同构. 则 $\phi\left(\chi_{(n)}\right)=s_n$, 即正好是对应于划分 n 的 Schur 对称多项式，且在同构映射下, ϕ 正好把顶点算子 $S(t)$ 映到 Bernstein 顶点算子.

性质 4. *作为 $R(S)\left[t_1,t_2,t_1^{-1},t_2^{-1}\right]$ 上的算子, 可以看出顶点算子满足以下性质:*

$$\begin{aligned}&t_1S\left(t_1\right)S\left(t_2\right)=-t_2S\left(t_2\right)S\left(t_1\right),\\&t_2\left(t_1-t_2\right)S\left(t_1\right)S^*\left(t_2\right)=t_1\left(t_2-t_1\right)S^*\left(t_2\right)S\left(t_1\right).\end{aligned}$$

5.2 证明 Frobenius 定理

定理 9. *对于任意划分*

$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_l)\vdash n,$$

$S_{\lambda_1}S_{\lambda_2}\cdots S_{\lambda_l}1$ 组成 $R\left(S_n\right)$ 内的正则正交向量并且正好对应于不可约特征标 χ_λ. 因此, 特征标表与矩阵系数相对应

$$\chi_\lambda\left(C_\mu\right)=\left\langle S_{\lambda_1}S_{\lambda_2}\cdots S_{\lambda_l}1,\beta_{\mu_1}\cdots\beta_{\mu_k}\right\rangle.$$

且在同构映射 ϕ 下, 特征标 $S_{\lambda_1}S_{\lambda_2}\cdots S_{\lambda_l}$ 1 对应于 Schur 对称多项式 s_λ, 而共轭类函数 $\beta_{\mu_1}\cdots\beta_{\mu_k}$ 对应于幂积对称多项式 $p_\mu=p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_k}$.

证明. 由顶点算子的性质, 当 $|t_1|>\cdots>|t_l|$ 时, 有:

$$S\left(t_1\right)S\left(t_2\right)\cdots S\left(t_l\right)1=\prod_{i<j}\left(1-\frac{t_j}{t_i}\right)\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_{(n)}}{n}\left(t_1^n+\cdots+t_l^n\right)\right).$$

则 $t_1^{l-1}t_2^{l-2}\cdots t_lS\left(t_1\right)S\left(t_2\right)\cdots S\left(t_l\right)1$ 可延拓到整个 $\mathbb{C}^l$ 上 $(t_1,\ldots,t_l)$ 的反对称函数. 由

系数矩阵组成的为 Vandermonde 行列式, 则我们有:

$$S_{\lambda_1}S_{\lambda_2}\cdots S_{\lambda_l}1=\det\left(\chi_{(\lambda_i-i+j)}\right)_{l\times l}.$$

即,

$$\phi\left(S_{\lambda_1}S_{\lambda_2}\cdots S_{\lambda_l}1\right)=\det\left(s_{\lambda_i-i+j}\right)_{l\times l}.$$

由 Jacobi-Trudi 公式：对于划分 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)$ 及 $q=\lambda_1$ 则

$$s_\lambda=\det\left(h_{\lambda_i-i+j}\right)=\det\left(e_{\lambda_i-i+j}\right)$$

即 $\phi\left(S_{\lambda_1}S_{\lambda_2}\cdots S_{\lambda_l}1\right)=s_\lambda$ 正好是与划分 λ 对应的 Schur 对称多项式.

即，我们证明了 Frobenius 公式:

$$s_\lambda=\sum_\mu \chi_\lambda(\mu)\frac{p_\mu}{z_\mu}.$$

□

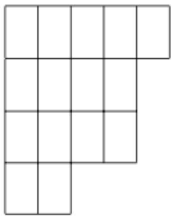
第六章 表示的提升与限制

6.1 杨束

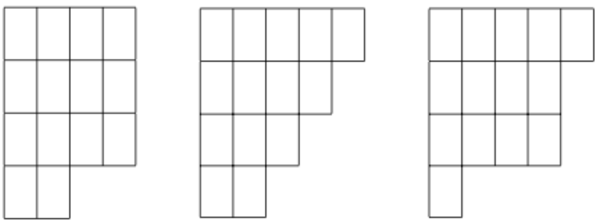
接下来考虑关于不可约表示的限制和提升的问题, 在这之前我们首先映入一个概念: 杨束. 在杨图中, 可以定义自然的偏序关系, 具体定义如下.

定义 15 (杨束)**.** *λ 和 μ 是两个杨图, 如果 μ 可以通过 λ 添加一个方格所得到的, 则记作 $\lambda \nearrow \mu$. 这种偏序关系集称为杨束 (Young lattice).*

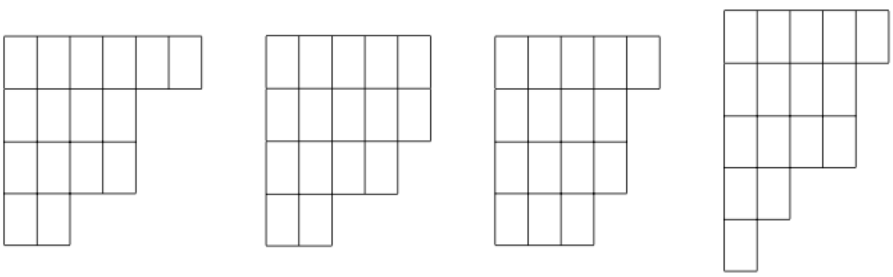
例 12. 如 $\lambda = (5,4,4,2)$, 则

$\lambda =$ 

将其中移除一个方格, 可得到一下三种



因此满足 $\mu \nearrow \lambda$ 的 μ 有 $(4,4,4,2), (5,4,3,2), (5,4,4,1)$ 这三种. 同样的将其添加一个格子, 可以得到有以下四种



因此满足 $\lambda \nearrow \mu$ 的 μ 有 $(6,4,4,2),(5,5,4,2),(5,4,4,3),(5,4,4,2,1)$ 这三种.

接下来考虑这样一个问题: 给定了一个 S_n 的表示 S^λ, 如何确定其在 S_{n-1} 上的限制表示, 和其在 S_{n+1} 上的诱导表示. 接下来的定理即是确定的方法.

6.2 Branching 法则

定理 10 (Branching 法则). 设 $\lambda \vdash n$, 则

$$\mathrm{Res}_{S_{n-1}} S^\lambda \cong \bigoplus_{\mu:\mu\nearrow\lambda} S^\mu \quad \mathrm{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} S^\lambda \cong \bigoplus_{\mu:\lambda\nearrow\mu} S^\mu$$

具体证明可参考 [2].

例 13. 根据 5.2, 我们可以得到以下两个关于表示的限制和提升的公式

$$\mathrm{Res}_{S_{14}} S^{(5,4,4,2)} = S^{(4,4,4,2)} \oplus S^{(5,4,3,2)} \oplus S^{(5,4,4,1)}$$
$$\mathrm{Ind}_{S_{15}}^{S_{15}} S^{(5,4,4,2)} = S^{(6,4,4,2)} \oplus S^{(5,5,4,2)} \oplus S^{(5,4,4,3)} \oplus S^{(5,4,4,2,1)}$$

这种关系可以不断进行下去, 因此我们在研究复杂的表示时可以不断分解为简单的表示. 以下式子给出了方法.

推论 8.

$$S^\lambda \cong \bigoplus_{\mu:\lambda\nearrow\mu} S^\mu \cong \bigoplus_{\nu:\nu\nearrow\lambda\nearrow\mu} S^\nu \cong \cdots \cong \bigoplus_{\emptyset=\lambda^{(0)}\lambda^{(1)}\nearrow\ldots\nearrow\lambda^{(n)}=\lambda} S^\emptyset$$

第七章 一个例子

下通过 $\mathbb{C}S_3$ 的不可约表示来说明上述方法:

Step 1 首先确定 $n=3$ 的划分. $3=3=2+1=1+1+1$, 因此 S_3 一共有 3 个共轭类, 在同构意义下有 3 个不可约表示.

Step 2 以下根据划分确定三种不可约表示

- 对于划分 $\lambda=(3)$, 由 2.23 可知其为 1 维的单位表示.
- 对于划分 $\lambda=(1,2)$, 其标准杨表为以下两种:

$$t_1=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad t_1=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

同时 $|C_2|=2$, 易知

$$e_1=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}-\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad e_2=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}-\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

因此分别计算出 S_n 中各个元素在 e_1,e_2 这组基下自然作用的矩阵, 得到表示 ρ 为以下结果

$$\rho((23))=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \quad \rho((12))=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix} \quad \rho((13))=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}$$
$$\rho((1))=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad \rho((123))=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix} \quad \rho((132))=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

- 对于划分 $\lambda=(1,1,1)$, 可知其为 1 维的符号表示.

因此,S_n 共有以上三种不可约表示.

Step 3 这三种表示的维数容易从上述过程看出, 亦可以由公式得到: 对于单位表示和符号表示, $\dim S^\lambda = \frac{3!}{3\cdot2\cdot1}$. 对于 $\lambda = (2,1)$ 的情况, $\dim S^\lambda = \frac{3!}{3\cdot1\cdot1} = 2$ 计算三种表示的特征标: 由 Frobenius 公式可知, 分别计算多项式的系数, 从而计算不可约特征标表如下

	1	3	2
	(1)	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Step 4 群代数 $\mathbb{C}S_n$ 的表示可以由 S_n 的表示在复数域上线性扩充得到.

参考文献

1. G. D. James, The representation theory of the symmetric groups. Springer, 2006, vol. 682.

2. B. E. Sagan, The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions. Springer Science & Business Media, 2013, vol. 203.

3. J. S. Frame, G. d. B. Robinson, and R. M. Thrall, "The hook graphs of the symmetric group,"Canadian Journal of Mathematics, vol. 6, pp. 316–324, 1954.

4. W. Fulton and J. Harris, Representation theory: a first course. Springer Science & Business Media, vol. 129.

5. A. B. Block and R. Van Peski, "Representation theory of the symmetric group: The verhsik- okounkov approach,"2018.

6. 景乃桓. 从 Frobenius 特征标公式到顶点算子 [J]. 中国科学: 数学, 2018, 48(11):12.