# Linear Representations of Finite Groups

# Homework #5

Due on 2022 年 12 月 28 日

苏可铮 2012604

# Problem 1

将 $S_3$（数字 1、2、3 的置换群）视为 $S_4$ 的子群。从 $S_3$ 的 2 维不可约表示 $W$ 可以诱导出 $S_4$ 的表示 $Ind_{S_3}^{S_4}W$，求 $Ind_{S_3}^{S_4}W$ 关于 $S_4$ 的不可约表示的直和分解

*Proof.* 由 $S_3$ 的 2 维不可约表示的划分为 $(2,1)$，因此满足 $3 \nearrow 4$ 的划分为 $(3,1)$，$(2,2)$
则由 Branching 法则：

$$\operatorname{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} S^\lambda \cong \bigoplus_{\mu:\lambda\nearrow\mu} S^\mu$$

即

$$\operatorname{Ind}_{S_3}^{S_4} S^{(2,1)} = S^{(3,1)} \bigoplus S^{(2,2)}$$

□

# Problem 2

设 $H$ 是有限群 $G$ 的子群，且 $H$ 是交换群。证明：$G$ 的任意复不可约表示的维数不超过 $|G|/|H|$

*Proof.* 对于 $\varphi \in Irr(H), \psi \in Irr(G)$，由 Frobenius 互反律有：

$$[\psi, \varphi^G]_G = [\psi, \varphi^G]_H = \begin{cases} 1 & \text{if } [\psi, \varphi^G]_G > 0, \\ 0 & \text{if } [\psi, \varphi^G]_G = 0. \end{cases}$$

由 $H$ 是交换群，则 $\varphi(1) = 1$ 且 $\varphi^G(1) = |G|/|H|$
又对 $\forall \psi \in Irr(G)$，$\psi$ 均为 $\varphi^G$ 的不可约成分，即 $G$ 的任意复不可约表示的维数不超过 $|G|/|H|$ □

# Problem 3

$G =< a, b \mid a^6 = 1, a^3 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} >$，已知其共轭类为 $C_1 = \{1\}$，$C_2 = \{a^3\}$，$C_3 = \{a, a^5\}$，$C_4 = \{a^2, a^4\}$，$C_5 = \{b, a^2b, a^4b\}$，$C_6 = \{ab, a^3b, a^5b\}$，以下是 $G$ 的复特征标表

| $g_i$ <br> $\lvert C_G(g_i)\rvert$ | $C_1$ <br> 12 | $C_2$ <br> 12 | $C_3$ <br> 6 | $C_4$ <br> 6 | $C_5$ <br> 4 | $C_6$ <br> 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| $\chi_3$ | 1 | -1 | -1 | 1 | i | -i |
| $\chi_4$ | 1 | -1 | -1 | 1 | -i | i |
| $\chi_5$ | 2 | -2 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| $\chi_6$ | 2 | 2 | -1 | -1 | 0 | 0 |

1. 求出 $\chi_5$ 和 $\chi_6$
2. 说明 $\chi_5$ 和 $\chi_6$ 对应的复不可约表示是否可以在 $\mathbb{R}$ 上实现

*Proof.* 显然群 $G$ 有 6 个共轭类和 6 个不可约表示特征标且 $|G| = 12$

(1) 由 $G' =< a^2 >$，故 $|G|/|G'| = 4$，又 $G/G' \cong C_4$，则可知群 $G$ 有 2 个不可约特征标和 4 个线性特征标（即为已知的 $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$），由

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 + n_6^2 = |G| = 12$$

则只能有 $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$, $n_5 = n_6 = 2$

再利用第二正交关系

$$\frac{1}{|C_G(g)|} \sum_{i=1}^{m} \chi_i(g)\chi_i\bar{(}h) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

可解出 $\chi_5$ 和 $\chi_6$ 为：

| $g_i$<br>$\lvert C_G(g_i)\rvert$ | $C_1$<br>12 | $C_2$<br>12 | $C_3$<br>6 | $C_4$<br>6 | $C_5$<br>4 | $C_6$<br>4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| $\chi_3$ | 1 | -1 | -1 | 1 | i | -i |
| $\chi_4$ | 1 | -1 | -1 | 1 | -i | i |
| $\chi_5$ | 2 | -2 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| $\chi_6$ | 2 | 2 | -1 | -1 | 0 | 0 |

(2) 若要判断 $\chi_5$ 和 $\chi_6$ 是否可以在 $\mathbb{R}$ 上实现，则要求 $V$ 是实的

则由 Frobenius-Schur 指标定理，若 $V$ 是实的当且仅当

$$F(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2) = 1$$

对于 $\chi_5$：

$$F(\chi_5) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_5(g^2) = 0$$

即 $\chi_5$ 对应的 $V$ 是复的，即不能在 $\mathbb{R}$ 上实现

对于 $\chi_6$ 同理有 $F(\chi_6) = 1$

综上 $\chi_5$ 对应的复不可约表示不可以在 $\mathbb{R}$ 上实现；$\chi_6$ 对应的复不可约表示可以在 $\mathbb{R}$ 上实现

□

# Problem 4

设群 $G$ 的阶数为奇数，c 是 $G$ 的共轭类的数目。证明：$|G| \equiv c\ (mod 16)$

*Proof.* 不妨记 $d_i$ $(i = 1, \ldots, c)$ 为群 $G$ 的不可约表示的维数，则有：

$$d_i \mid |G|$$

由 $|G|$ 为奇数，则 $d_i$ 也均为奇数，则有：

$$d_i^2 \equiv 1, 9\ (mod\, 16)$$

Problem 4 continued on next page... 

又

$$|G| = \sum_{i=1}^{c} d_i^2 = 1 + \cdots + 1 + 9 + \cdots + 9 \ (mod 16)$$

令

$$\phi : \mathbb{Z}_{16} \to \mathbb{Z}_8$$

则

$$\phi(\sum_{i=1}^{c} d_i^2) = \sum_{i=1}^{c} 1 \ (mod 8) = c \ (mod\, 8)$$

则为了得到 $|G| \equiv c \ (mod\, 16)$，只需证明 $d_i^2 \equiv 9 \ (mod\, 16)$ 的表示出现偶数次即可
对于 $g \in G, g \neq g^{-1}, g = hg^{-1}h^{-1}, h \in G$，令 $g$ 的共轭类为 $d_g$，则有 $|d_g| \mid |G|$，即 $|d_g|$ 为奇数，则表明必然 $\exists k \in g_d$ 且其与其逆非共轭，对于 $k^{-1}$ 同理，这表明这样的不可约表示是成对出现的，即证明了我们以上的命题 □