Linear Representations of Finite Groups

Homework #4

Due on 2022 年 12 月 1 日

苏可铮 2012604

Problem 1

设 A 是结合代数，e 是 A 中的幂等元，V 是 A-模，$Hom_A(Ae, V)$ 是从 Ae 到 V 的模同态组成的线性空间。证明：$Hom_A(Ae, V)$ 作为线性空间同构于 eV

Proof. 定义如下映射 σ：

$$\sigma : eV \to Hom_A(Ae, V)$$

$$x \mapsto \{a \mapsto ax\}$$

容易验证，上述 eV 到 $Hom_A(Ae, V)$ 的映射为双射，且显然满足：

$$\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$$

$$\sigma(kx) = k\sigma(x)$$

即 σ 保持加法和数乘封闭，综上可知 $Hom_A(Ae, V) \cong eV$ □

Problem 2

设 p 是素数，证明：p^2 阶群 G 是交换群

Proof. 首先证明如下引理：

Lemma 2.1 p-群的中心不是平凡群

Proof of Lemma 2.1 不妨设 $|G| = p^e, e \geqslant 1$，类方程右边每一项都整除 p^e，所以也是一个 p 的正幂，即可以被 p 整除；若中心是平凡的，则单位元的类 C_1 是方程右边唯一一个 1，那么方程将写成 $p^e = 1 + \sum k_i p,\ k_i \in \mathbb{Z}$，矛盾！故必有更多的 1 在右侧，即 p-群的中心是非平凡的。

设 G 为阶为 p^2 的群，则由 Lemma 2.1 知：它的中心 Z 不是平凡群，故 Z 的阶为 p 或 p^2

- 若 Z 的阶为 p，则取 $x \in G, x \notin Z$，中心化子 $Z(x)$ 包含 x 以及 Z，故严格大于 Z；又由 $|Z(x)| = |G|$，则知 $|Z(x)| = p^2$，故有 $Z(x) = G$，即 x 与 G 的每个元素都交换，故 $x \in Z(x)$，矛盾！故 Z 的阶不为 p
- 若 Z 的阶为 p^2，同理可得 $Z = G$，故 G 为 Abelian 群

综上，p^2 阶群 G 为 Abelian 群 □

Problem 3

设 $V = \mathbb{C}S_5 e$ 是划分 5=4+1 对应的 S_5 的不可约表示，证明：V 等价于 S_5 的约减表示

Proof. 首先确定 n=5 的划分有 5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1，因此 S_5 一共有 7 个共轭类，在同构意义下有 7 个不可约表示
对于划分 5=4+1，其标准 Young 表有以下四种：

Problem 3 continued on next page...

1	2	3	4
5			

(a) t1

1	2	3	5
4			

(b) t2

1	2	4	5
3			

(c) t3

1	3	4	5
2			

(d) t4

Figure 1: Young table of S_5

由 Hook-length 公式:

$$dimS^{\lambda} = f^{\lambda} = \frac{n!}{\prod_{u\in\lambda} h_{\lambda}(u)} = \frac{5!}{5\cdot 3\cdot 2} = 4$$

且对应置换群 S_5 的特征标表:

g_i $\lvert C_G(g_i)\rvert$	(1) 1	(12) 10	(123) 20	(12)(34) 15	(1234) 30	(12)(345) 20	(12345) 24
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1	-1	1
χ_3	4	2	1	0	0	-1	-1
χ_4	4	-2	1	0	0	1	-1
χ_5	5	-1	-1	1	1	-1	0
χ_6	5	1	-1	1	-1	1	0
χ_7	6	0	0	2	0	0	1

可知上述对 S_5 的分划 $5=(4,1)$ 为 4 维不可约表示，则为 S_5 的约减表示 $\square$