Linear Representations of Finite Groups

Homework #3

Due on 2022 年 11 月 23 日

苏可铮 2012604

Problem 1

设 P 是有限集合，有限群 G 在 P 上有群作用，χ 是对应的置换表示的特征标，由 G 在 P 上的群作用，定义 G 在 $P \times P$ 上的群作用：$g(x,y) = (gx, gy)$，证明：

$$< \chi, \chi >= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |(P \times P)^g|$$

其中 $(P \times P)^g = \{(x,y) \in (P \times P) \mid g(x,y) = (x,y)\}$ 是群元素 g 的不动点集

Proof. 由题意：$\chi(g) = |P^g|$ 其中 $P^g = \{x \in P | gx = x\}$ 为群元素 g 的不动点集，则有：

$$\begin{aligned}
|(P \times P)^g| &= |\{(x,y) \in (P \times P) \mid g(x,y) = (x,y)\}| \\
&= \sum_{g \in G} |\{(x,y) \in (P \times P) \mid (gx, gy) = (x,y)\}| \\
&= \sum_{g \in G} |P^g| \\
&= |P^g|^2 = \chi^2(g)
\end{aligned}$$

故 $< \chi, \chi >= \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \chi(g) \bar{\chi}(g) = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \chi^2(g) = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} |(P \times P)^g|$ □

Problem 2

群 G 在集合 P 上有群作用称为 2-传递的，如果这个作用是传递的，并且对 P 中任意 $x_1 \neq x_2, x_2 \neq x_2$，存在 $g \in G$ 使得 $x_2 = gx_1, y_2 = gy_1$
证明：G 在 P 上的群作用是 2-传递的，并且当且仅当 G 在 $P \times P$ 上的群作用恰有 2 个轨道

Proof.（先证必要性 $\Rightarrow$）
若 G 在 P 上的群作用是 2-传递的，则有 G 在 P 上的群作用是传递的，即

$$\forall x_1, x_2 \in P, \exists g \in G \quad \text{s.t.} \quad gx_1 = x_2$$

由 $P \times P = \{(x,x) \mid x \in P\} \cup \{(x,y) \mid x, y \in P \text{且} x \neq y\}$
则对 $\forall (x,x) \in \{(x,x) \mid x \in P\}$，有：

$$g(x,x) = (gx, gx) \in \{(x,x) \mid x \in P\}$$

且由 G 在 P 上作用传递，故 G 在 $\{(x,x) \mid x \in P\}$ 上作用传递
又对 $\forall (x,y) \in \{(x,y) \mid x, y \in P \text{且} x \neq y\}$，由 $gx \neq gy$，则：

$$g(x,y) = (gx, gy) \in \{(x,y) \mid x, y \in P \text{且} x \neq y\}$$

且由 G 在 P 上作用传递，故 G 在 $\{(x,y) \mid x, y \in P \text{且} x \neq y\}$ 上作用传递
综上可知，G 在 $P \times P$ 上的群作用恰有 2 个轨道
（再证充分性 $\Leftarrow$）
若 G 在 $P \times P$ 上的群作用恰有 2 个轨道，且 $P \times P = \{(x,x) \mid x \in P\} \cup \{(x,y) \mid x, y \in P \text{且} x \neq y\}$，显然 G 在 $P \times P = \{(x,x) \mid x \in P\}$ 和 $\{(x,y) \mid x, y \in P \text{且} x \neq y\}$ 上的作用都是封闭的，故 $P \times P = \{(x,x) \mid x \in P\}$ 和 $\{(x,y) \mid x, y \in P \text{且} x \neq y\}$ 为这 2 个轨道

则对 $\forall x_1 \neq y_1, x_2 \neq y_2$，由 G 在 $\{(x,y) \mid x,y \in P且 x \neq y\}$ 上传递，则

$$\exists g \in G \quad \text{s.t.} \quad g(x_1, y_1) = (x_2, y_2),\ 即x_2 = gx_1, y_2 = gy_1$$

故 G 在 P 上的群作用是 2-传递的 □

Problem 3

设有限群 G 在有限集合 P 上的群作用是 2-传递的，设 ρ 是对应的置换表示，ρ 可分解为 $\rho = \rho_1 \oplus \theta$，其中 ρ_1 是 1 维平凡表示，θ 是约减表示，证明：θ 是不可约表示

Proof. 不妨记 χ 为置换表示 ρ 的特征标，ϕ 为约减表示 θ 的特征标，由 ρ 可分解为 $\rho = \rho_1 \oplus \theta$ 得：

$$\chi = \phi + 1$$

又由有限群 G 在有限集合 P 上的群作用是 2-传递的，则由上一题知：有限群 G 在 $P \times P$ 上的群作用恰有 2 个轨道，则由 Burnside's lemma 得：

$$<\chi, \chi>= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |(P \times P)^g| = 2$$

又由：

$$<\chi, \chi>=<\phi + 1, \phi + 1>= 1 + 2 < 1, \phi > + < \phi, \phi >= 1 + < \phi, \phi >= 2$$
$$\Rightarrow \quad < \phi, \phi >= 1$$

则 θ 是不可约表示 □

Problem 4

考虑 S_n 和 A_n $(n \geqslant 4)$ 在集合 $P = \{1, 2, , \ldots, n\}$ 上的置换作用
证明：这些群有不可约表示 θ，其特征标是：

$$\chi_\theta(g) = |P^g| - 1$$

其中 P^g 是 g 的不动点集

Proof. 首先证明 S_n 和 A_n $(n \geqslant 4)$ 在集合 $P = \{1, 2, , \ldots, n\}$ 上的置换作用为 2-传递的：
即对 $\forall x_1 \neq y_1, x_2 \neq y_2$，存在 $\sigma \in A_n \subset S_n$ s.t. $\sigma(x_1) = x_2, \sigma(y_1) = y_2$

- 若 x_1, x_2, y_1, y_2 互不相同，取 $\sigma = (x_1 y_1)(x_2 y_2) \in A_n \subset S_n$，则满足条件
- 若 $x_1 = y_1, x_2 \neq y_2$，由于 $n \geqslant 4$，取 $k \neq x_1, y_1, x_2$，则 $\sigma = (k x_2 y_2)$，则满足条件
- 若 $x_1 \neq y_1, x_2 = y_2$，同理取 $k \neq x_1, y_1, x_2$，则 $\sigma = (k x_1 y_1)$，则满足条件
- 若 $x_1 = y_1, x_2 = y_2$，则 $\sigma = (1)$，则满足条件
- 若 $x_2 = y_1, x_1 \neq y_2$，则 $\sigma = (x_1 y_1 y_2)$，则满足条件

- 若 $x_1 = y_2, x_2 \neq y_1$，则 $\sigma = (x_2 y_2 y_1)$，则满足条件
- 若 $x_1 = y_2, x_2 = y_1$，同理取 p, q 满足与 x_1, x_2 互不相同，则 $\sigma = (x_1 x_2)(pq)$，则满足条件

综上所述，对 $\forall x_1 \neq y_1, x_2 \neq y_2$，存在 $\sigma \in A_n \subset S_n$ s.t. $\sigma(x_1) = x_2, \sigma(y_1) = y_2$，则 S_n 和 A_n $(n \geqslant 4)$ 在集合 $P = \{1, 2, , \ldots, n\}$ 上的置换作用为 2-传递的
则由题目三可知：存在 G 的置换表示和约减表示分别为 ρ, θ，对应的特征标分别为 χ, ϕ，且 θ 为不可约表示
又因为 ρ 可分解为 $\rho = \rho_1 \oplus \theta$，其中 ρ_1 是 1 维平凡表示，则由 $\chi = 1 + \chi_\theta$ 得：

$$\chi_\theta(g) = \chi(g) - 1 = |P^g| - 1$$

其中 P^g 是 g 的不动点集，综上 θ 即为满足条件的不可约表示 □

Problem 5

设 P 是正十二面体的所有顶点组成的集合，作为正二十面体的对称群，A_5 作用在集合 P 上，设 ρ 是对应的置换表示，请将 ρ 分解成 A_5 的不可约表示的直和

Solution 对于正十二面体以及正二十面体其旋转对称包括三种（除恒等变换之外）：

中心-顶点为轴、中心-面中心为轴，中心-棱中点为轴的旋转；其对应的阶数分别为 5，3，2，数量分别为 24，20，15，对应 A_5 的共轭类为：(12345) 和 (21345)，(12)(134)，(123)

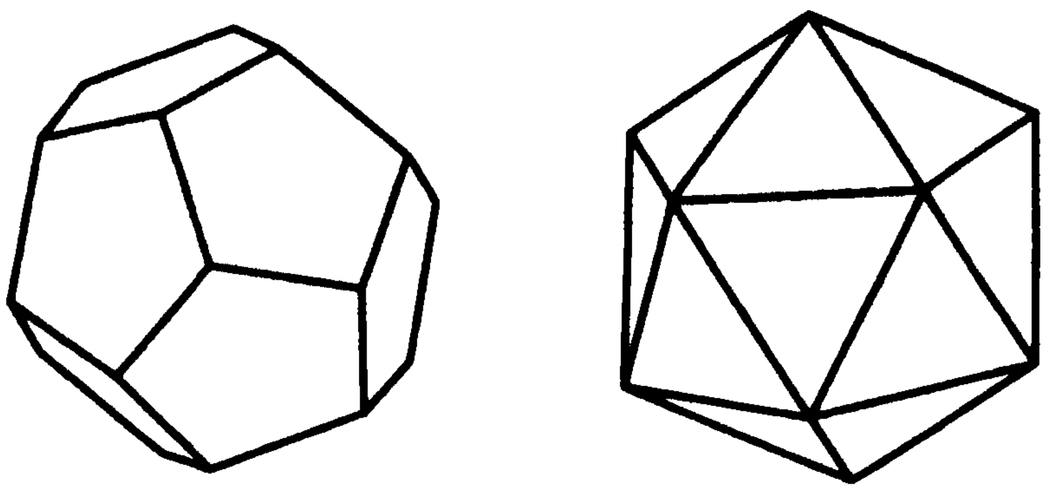

Figure 1: 正十二面体以及正二十面体

则可知 ρ 的特征标 χ 取值为：

	(1) (1)	(12)(34) (15)	(123) (20)	(12345) (12)	(21345) (12)
χ	12	0	0	2	2

由 A_5 的特征标表为：

	(1) (1)	(12)(34) (15)	(123) (20)	(12345) (12)	(21345) (12)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_3	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

则有:

$$
\begin{aligned}
&<\chi,\chi_1>=\frac{1}{60}(12+2\times 12+2\times 12)=1\\
&<\chi,\chi_2>=\ <\chi_1,\chi_3>=\frac{1}{60}(36+12(1+\sqrt{5})+12(1-\sqrt{5}))=1\\
&<\chi,\chi_4>=\frac{1}{60}(48+12\times(-2)+12\times(-2))=0\\
&<\chi,\chi_1>=\frac{1}{60}(60+0+0+0+0)=1
\end{aligned}
$$

即 ρ 有 1 个平凡表示，2 个不同的 3 维不可约表示，1 个 5 维不可约表示
即分解成 A_5 的不可约表示的直和为：$\rho=\rho_1\oplus\rho_2\oplus\rho_3\oplus\rho_5$