Linear Representations of Finite Groups

Homework #2

Due on 2022 年 10 月 26 日

苏可铮 2012604

Problem 1

设 (ρ, V) 是有限群 G 的有限维不可约复表示，证明：对任意 $g \in Z(G)$，$\rho(g)$ 是 V 上的数乘变换

Proof. 对 $\forall g \in Z(G)$，则 $\rho(g)$ 为 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$，且对 $\forall h \in G$，有：

$$\mathscr{A}\rho(h) = \rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) = \rho(h)\rho(g) = \rho(h)\mathscr{A}$$

则 $\mathscr{A}$ 为 V 到自身的缠结算子，则由 Schur 引理可知，$\rho(g) = \mathscr{A}$ 为数乘变换 □

Problem 2

设 χ_i 和 χ_j 是有限群 G 的不可约复表示的特征标，特征标间的卷积定义为

$$\chi_i * \chi_j(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{y \in G}\chi_i(y)\chi_j(y^{-1}x)$$

证明：$\chi_i * \chi_j = \frac{\delta_{i,j}}{\chi_i(1)}\chi_i$

Proof. 设 χ_i, χ_j 分别为有限群 G 的不可约复表示 ρ_i, ρ_j 的特征标，则 $dim\rho_i = dim\rho_j = dimG = n$ 记 $\rho_i(g), \rho_j(g)$ 对应的矩阵分别为 $r_{i_1 i_2}(g), r_{j_1 j_2}(g)$，则有：

$$\begin{aligned}
\chi_i * \chi_j(x) &= \frac{1}{|G|}\sum_{y \in G}\chi_i(y)\chi_j\left(y^{-1}x\right) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{y \in G}\big(\sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} r_{i_1 i_2}(y)\big)\big(\sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant n}\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} r_{j_1 k}(y^{-1}) r_{k j_1}(x)\big) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant i_1 \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1 \leqslant n}}\sum_{y \in G} r_{i_1 i_2}(y) r_{j_1 k}(y^{-1}) r_{k j_1}(x) \\
&= \sum_{1 \leqslant i_1, j_1, k \leqslant n} r_{k j_1}(x)\frac{1}{|G|}\sum_{y \in G} r_{i_1 i_2}(y) r_{j_1 k}(y^{-1}) \\
&= \sum_{1 \leqslant i_1, j_1, k \leqslant n} r_{k j_1}(x)\frac{1}{n}\delta_{ij}\delta_{i_1 j_1}\delta_{i_1 k_1} \\
&= \frac{\delta_{ij}}{n}\sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant n} r_{j_1 j_2}(x) \\
&= \frac{\delta_{ij}}{n}\chi_j(x) \\
&= \frac{\delta_{ij}}{\chi_i(1)}\chi_i(x)
\end{aligned}$$

即得证：$x_i * x_j = \frac{\delta_{ij}}{\chi_i(1)}\chi_i$ □

Problem 3

将有限群 $Q_8 = \{1,-1,i,-i,j,-j,k,-k\}$ 的元素依次换成变量 $x_1,x_2,x_3.x_4,x_5,x_6,x_7,x_8$，设 $X = [x_i x_j^{-1}]_{8\times 8}$ 是 Q_8 的群矩阵，把 X 的行列式分解成不可约多项式的乘积

Proof. 由题意，群矩阵为:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & x_6 & x_5 & x_8 & x_7 \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 & x_8 & x_7 & x_5 & x_6 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_7 & x_8 & x_6 & x_5 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \\ x_6 & x_5 & x_8 & x_7 & x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \\ x_7 & x_8 & x_6 & x_5 & x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_8 & x_7 & x_5 & x_6 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix}_{8\times 8}$$

则有:

$$X = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&& 1 & \\ &&&&&&& 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} & 1 &&&&&& \\ 1 &&&&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&&&& 1 && \\ &&&& 1 &&& \\ &&&&&&& 1 \\ &&&&&& 1 & \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} &&& 1 &&&& \\ && 1 &&&&& \\ 1 &&&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&&&&&& 1 \\ &&&&&& 1 & \\ &&&& 1 &&& \\ &&&&& 1 && \end{bmatrix} x_3$$

$$+ \begin{bmatrix} && 1 &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ & 1 &&&&&& \\ 1 &&&&&&& \\ &&&&&& 1 & \\ &&&&&&& 1 \\ &&&&& 1 && \\ &&&& 1 &&& \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} &&&&& 1 && \\ &&&& 1 &&& \\ &&&&&& 1 & \\ &&&&&&& 1 \\ 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ && 1 &&&&& \end{bmatrix} x_5 + \begin{bmatrix} &&&& 1 &&& \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&&& 1 \\ &&&&&& 1 & \\ & 1 &&&&&& \\ 1 &&&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 1 &&&& \end{bmatrix} x_6$$

$$+ \begin{bmatrix} &&&&&&& 1 \\ &&&&&& 1 & \\ &&&&& 1 && \\ &&&& 1 &&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \end{bmatrix} x_7 + \begin{bmatrix} &&&&&& 1 & \\ &&&&&&& 1 \\ &&&& 1 &&& \\ &&&&& 1 && \\ &&& 1 &&&& \\ && 1 &&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ 1 &&&&&&& \end{bmatrix} x_8$$

由 Q_8 有 5 个等价类 $\big\{\{1\},\{-1\},\{\pm i\},\{\pm j\},\{\pm k\}\big\}$，故 Q_8 共有 5 种不等价的不可约表示，记其维数分别为:$n_1,n_2,n_3,n_4,n_5\,(n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4 \leqslant n_5)$，则由于 $n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2+n_5^2 = |Q_8| = 8$ 且又由 $n_1,n_2,n_3,n_4,n_5 \in \mathbb{Z}$ 可得：$n_1=n_2=n_3=n_4=1, n_5=2$

Problem 3 continued on next page...

对于四元数群 Q_8 的特征标表为（其中 $n=2, j=r=1$）：

g_i $\lvert C_G(g_i)\rvert$	1 $4n$	a^n $4n$	a^r $2n$	b 4	ab 4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	$(-1)^r$	1	-1
χ_4	1	1	$(-1)^r$	-1	1
ψ_j	2	$2(-1)^j$	$\omega^{rj}+\omega^{-rj}$	0	0

则对应群 X 的特征标表为：

g_i	$\{1\}_{(1)}$	$\{-1\}_{(1)}$	$\{\pm i\}_{(2)}$	$\{\pm j\}_{(2)}$	$\{\pm k\}_{(2)}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

则 X 的行列式分解成不可约多项式的乘积为：

$$\begin{aligned}|X| =&(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)(x_1+x_2+x_3+x_4-x_5-x_6-x_7-x_8)\\ &(x_1+x_2-x_3-x_4+x_5+x_6-x_7-x_8)(x_1+x_2-x_3-x_4-x_5-x_6+x_7+x_8)\\ &\left[(x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)^2+(x_5-x_6)^2+(x_7-x_8)^2\right]^2\end{aligned}$$

□

Problem 4

设 $G=<x,y\,|\,x^7=y^3=1, yxy^{-1}=x^2>$，求 G 的特征标表和所有正规子群

Proof. 由 $G=F_{7,3}=<x,y\,|\,x^7=y^3=1, yxy^{-1}=x^2>$，则由其定义关系, $G=F_{7,3}$ 有 5 个共轭类, 分别为 $\left\{\{1\},\{a\},\{a^3\},\{b\},\{b^2\}\right\}$，且有 3 个线性特征标和 2 个 3 次不可约特征标
设 $\eta=\frac{2\pi i}{7}, \omega=\frac{2\pi i}{3}$, 我们就可以构造其特征标表为：

g_i $\lvert C_G(g_i)\rvert$	1 21	x 7	x^3 7	y 3	y^2 3
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	1	ω^2	ω
ϕ_1	3	$\eta+\eta^2+\eta^4$	$\eta^3+\eta^5+\eta^6$	0	0
ϕ_2	3	$\eta^3+\eta^5+\eta^6$	$\eta+\eta^2+\eta^4$	0	0

且其平凡正规子群为：$\{e\}, F_{7,3}$; 非平凡正规子群为：$<x,y>$ □