Linear Representations of Finite Groups

Homework #1

Due on October 04, 2021

苏可铮 2012604

Problem 1

设 ρ 是有限群 G 的有限维复表示，证明：对任意 $g \in G$，矩阵 $\rho(g)$ 是可对角化的

Proof. 对于表示 $\rho : G \to GL(G)$，由 G 为有限群，不妨设 $\dim G = n$
则有 $\deg\rho = \dim V = n$，即 ρ 有有限阶为 n，则有：

$$1 = \rho(1) = \rho(g^n) = \rho(g)^n$$

则 $\rho(g)$ 的复数域最小多项式 f 为：$x^n - 1$
显然对于其最小多项式，有 n 个不同的根，且为 n 重单位根，由线性代数知识可知：$\rho(g)$ 可对角化 □

Problem 2

将 $\mathbb{R}^n$ 看作一般线性群 $GL(n, \mathbb{R})$ 的表示，群的作用是矩阵和列向量的乘法
证明：这个表示是不可约的

Proof. 设 $\rho : \mathbb{R}^n \to GL(n, \mathbb{R})$ 是一个表示，若 ρ 是可约的，则有不变子空间 V_1 满足

$$V_1 \neq \{0\}, V_1 \neq GL(n, \mathbb{R})$$

取 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\{e_i | e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T, i = 1, 2, \ldots, n\}$
任取 V_1 中一非零列向量 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n)^T$，其中 $\alpha_j \neq 0$

于是有：$$\begin{bmatrix} 1 & \ldots & & \ldots & & \ldots & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \vdots & & & 2 & & & \vdots \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & \ldots & & \ldots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, 2\alpha_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)^T \in V_1$$

则有：$\alpha_j e_j = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, 2\alpha_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)^T - \alpha \in V_1$

于是有：$$\begin{bmatrix} 1 & \ldots & & \ldots & & \ldots & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \vdots & & & \frac{1}{\alpha_j} & & & \vdots \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & \ldots & & \ldots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \times \alpha_j e_j = e_j \in V_1$$

再利用循环矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \ldots & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$ 累次作用在 e_j 上，以此得到 $e_{j+1}, \ldots, e_n, e_1, \ldots, e_{n-1}$

于是 $\mathbb{R}^n \subset V_1$，从而 $\mathbb{R}^n = V_1$，即 $\mathbb{R}^n$ 的这个表示是不可约的 □

Problem 2 continued on next page...

Problem 3

(1) 证明有限群 G 的 1 维表示与群 G/G' 的 1 维表示一一对应，其中 $G' =< ghg^{-1}h^{-1} >$ 是 G 的导群（换位子群）

(2) 求 S_3 的所有 1 维表示

Proof. 设 ρ 是 G 的一个 1 维表示，又由 $G' =< ghg^{-1}h^{-1} >$，则由于

$$\rho(ghg^{-1}h^{-1}) = \mu_g\mu_h\mu_{g^{-1}}\mu_{h^{-1}} = \mu_g\mu_{g^{-1}}\mu_h\mu_{h^{-1}} = 1$$

故知：$G' \subseteq ker\rho$ 由对任意 $a \in G$，都有：

$$a^{-1}ghg^{-1}h^{-1}a = a^{-1}gaa^{-1}haa^{-1}g^{-1}aa^{-1}h^{-1}a = (a^{-1}ga)(a^{-1}ha)(a^{-1}ga)^{-1}(a^{-1}ha)^{-1}$$

依然是一个换位子，故 $G' \triangleleft G$
令 π_0 为 G 到 G/G' 的自然映射，而 ρ 为 G 到 F^* 的同态由于 $G' \subseteq ker\rho$，故知 $\pi_0(g) = \pi_0(h)$ 时，$\rho(g) = \rho(h)$，于是由

$$\rho_0(\pi_0(g)) = \rho(g), \forall\pi_0(g) \in G/G'$$

定义的 G/G' 到 F^* 映射为同态，即 ρ_0 为 G/G' 的一维表示
反之，若 ρ_0 为 G/G' 的一维表示，则

$$\rho = \rho_0 \circ \pi_0$$

为 G 的一维表示
综上，有限群 G 的 1 维表示与群 G/G' 的 1 维表示一一对应 □

Solution of (2)

由三阶对称群为 $S_3 =< x, y \,|\, x^3, y^2, xyxy >$
每个群都有平凡表示，即取值恒为 1 的 1 维表示：

$$\sigma \mapsto 1$$

对于其 1 维非平凡表示，即 S_3 的符号表示：

$$\sigma \mapsto \text{sgn}\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma\text{为偶置换} \\ -1, & \sigma\text{为奇置换} \end{cases}$$

Problem 4

设 (ρ, V) 是有限群 G 的有限维表示，令

$$V^G = \{v \in V \,|\, \rho(g)(v) = v, \forall g \in G\},\, P = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)$$

(1) 证明 P 是从 V 到 V^G 的投影

(2) 证明 P 是缠结算子

Problem 4 continued on next page...

(3) 证明 V^G 是 V 的 G 不变子空间，它的维数是 $\mathrm{dim}V^G=\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}tr(\rho(g))$

Proof. 显然 V^G 是 V 的子表示

(1) 对任意 $v\in V$，有 $\rho(g)v\in V^G$，且当 $v\in V^G$ 时，有 $\rho(g)v=v$，故 $P^2=P$ 且 $\mathrm{Im}P=V^G$
故 P 是从 V 到 V^G 的投影

(2) 由 (ρ,V) 和 $(\rho|_{V^G},V^G)$ 为 G 的两个表示，则显然有 $P\in Hom(V,V')$，则对任意 $v\in V$ 有:

$$P\rho(v)=\rho|_{V^G}P$$

即 P 是缠结算子

(3) 显然对于任意 $g\in G$，有 $\rho(g)V_1=V_1$，则 V^G 是 V 的 G 不变子空间
由于 $P^2=P$ 故知：$f(x)=x^2-x$ 为 P 的零化多项式，可知 P 可对角化，其特征值仅有 0 或 1
即存在 $Q\in GL(V)$ 使得 $QPQ^{-1}=J=\begin{pmatrix}I_{n_1} & \\ & O_{n_2}\end{pmatrix}$，其中 $0\leqslant n_1,n_2\leqslant dimV,n_1+n_2=dimV$
而 I_m 的阶数为 P 的特征值为 1 对应特征子空间的维数，又知该特征子空间就是 V^G，所以有:

$$dimV^G=n_1=tr(J)=tr(QPQ^{-1})=tr(P)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}tr(\rho(g))$$

于是命题得证

□