第二章　控制系统的运动分析

§2.1　控制系统的运动分析

一般说来，对系统进行分析的目的就是要揭示系统状态的运动规律和基本特性，对系统的分析通常分为定量分析和定性分析两个方面. 定量分析就是要对系统的运动规律进行精确的研究，即定量地确定出系统由初始状态和外部作用所引起的整体响应; 而定性分析是对确定系统的行为和结构的重要性质，如能控性、能观测性和稳定性等进行研究. 前面建立的系统的状态空间表示为分析系统的行为和特性提供了可能性.

§ 2.1.1 **系统的运动微分方程**

我们建立的系统的运动微分方程通常只是系统的实际模型的数学表示，因此，这个方程的解是否存在与唯一就成为需要考虑的一个理论问题. 尤其重要的是，由于非线性系统的解的解析表达式一般是求不出来的，所以关于解的一般性质的定理在微分方程定性理论中就起着基础性的作用. 下面给出几个定理，相关的证明可以参见相应的常微分方程教材.

对于运动微分方程

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t),\ \ (x(t), t) \in W \times I \tag{1.1}$$

其中，$x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))^T \in W$, W 是 n 维欧式空间 R^n 中的一个区域. $t \in I$, $I = (t_1, t_2) \subset R$ 是一个区间, $t_1 \geq -\infty, t_2 \leq +\infty$. 我们常取 $t \in (-\infty, +\infty)$, $f(x(t), t) = (f_1(x(t), t), \cdots, f_n(x(t), t))^T$ 在 $W \times I$ 上是连续的.

定义 2.1.1 对于微分方程 (1.1), 如果存在一个常数 L, 对任何的 $x(t), y(t) \in W,\ t \in I$, 都有

$$|f_i(x(t), t) - f_i(y(t), t)| \leq L \sum_{i=1}^{n} |x_i(t) - y_i(t)| \tag{1.2}$$

则称 $f_i(x(t), t)$ 在 $W \times I$ 上满足李普希兹条件. 如果每一个 $f_i(x(t), t)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 在 $W \times I$ 上都满足李普希兹条件，则称 $f(x(t), t) = (f_1(x(t), t), \cdots, f_n(x(t), t))^T$ 在 $W \times I$ 上满足李普希兹条件.

由微积分理论可知，如果 $f_i(x(t), t)$ 的所有偏导数存在，并且在 $W \times I$ 上有

$$\left|\frac{\partial f_i(x(t), t)}{\partial x_j}\right| \leq K,\ i, j = 1, 2, \cdots, n$$

其中 K 为某正实数，则 $f_i(x(t), t)$ 在 $W \times I$ 上满足李普希兹条件.

下面是关于运动微分方程 (1.1) 的解的基本性质的几个定理.

定理 2.1.1(解的存在唯一性定理) 对于运动微分方程 (1.1), 如果 $f(x(t),t)$ 在 $W \times I$ 上连续，且满足李普希兹条件，则对任意初始条件 $(x_0,t_0) \in W \times I$, 总存在常数 $a > 0$, 使得微分方程 (1.1) 存在唯一连续解

$$x(t) = x(t,x_0,t_0),\ \ t \in [t_0 - a, t_0 + a], x(t_0) = x_0.$$

进一步，由上述任意初始条件 $(x_0,t_0) \in W \times I$ 确定的解 $x = x(t)$, 当 t 向前延拓时 (令 t 无限增大), 或者位于 W 的内部，或者于有限时刻 t^* 到达 W 的边界. 同理，当 t 向后延拓时，也是一样的.

$\square$

定理 2.1.2(对初始值的连续依赖性和可微性) 对于运动微分方程 (1.1), 设 $f(x(t),t)$ 在 $W \times I$ 上连续，且满足李普希兹条件，

(1) 如果 $x^i(t) = x(t,x_0^i,t_0)$, $i = 1,2$, 是微分方程 (1.1) 的定义在 $[t_0,t_2]$ 上的两个解，并且 $x^i(t)$, $i = 1,2$, 均位于 W 之内，则任给一个 $\varepsilon > 0$, 可以找到一个 $\delta > 0$, 使得当初始状态 x_0^1 和 x_0^2 的各分量满足 $|x_{i0}^1 - x_{i0}^2| \le \delta$, $(i = 1,2,\cdots,n)$ 时，对任意 $t \in [t_0,t_1]$ 都有 $|x_i^1(t) - x_i^2(t)| < \varepsilon$, $(i = 1,2,\cdots,n)$.

(2) 如果 $f(x(t),t)$ 的所有偏导数 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}, i,j = 1,2,\cdots,n$ 在 $W \times I$ 上连续，则微分方程 (1.1) 的解 $x(t)$ 的所有分量函数 $x_i(t) = x_i(t,x_0,t_0)$ 对初始坐标 x_{i0} 也都连续可微， $i = 1,2,\cdots,n$.

该定理的几何意义是：如果在 t_0 时刻，初始状态 x_0^1 和 x_0^2 比较接近，那么，对于任意 $t \in [t_0,t_2]$, 由微分方程 (1.1) 的解表示的状态 $x^1(t)$ 和 $x^2(t)$ 也比较接近.

在控制系统理论中，通常考虑比较多的是依赖于参数 $u(t)$ 的微分方程

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t),\ \ (x(t),u(t),t) \in W \times J \times I \tag{1.3}$$

其中参数 $u(t) \in J = (u_1,u_2) \subset R$ 是一个区间.

$\square$

定理 2.1.3(解对参数的连续性与可微性) 对于微分方程 (1.3), 设 $f(x(t),u(t),t)$ 在 $W \times J \times I$ 上是连续的，并且对于每个确定的 $u(t) \in J$, $f(x(t),u(t),t)$ 在 $W \times I$ 上满足李普希兹条件. 那么

(1) 对于 $t_0 \in I, u_0 \in J\, x_0 \in W,$, 存在常数 $\rho > 0$, $a > 0$, 使得当 $|u(t) - u_0| \le \rho$ 时，微分方程 (1.3) 存在唯一的连续解

$$x(t) = x(t,x_0,u(t),t_0),\ \ t \in [t_0 - a, t_0 + a],\ x(t_0) = x_0$$

并且关于参数 $u(t)$ 也是连续的.

(2) 如果 $f(x(t),u(t),t)$ 是 $W\times J\times I$ 上的连续可微函数 (或解析函数), 则当 $u(t)\in J$ 时，其解函数 $x(t)=x(t,x_0,u(t),t_0)$ 也是 $u(t)$ 的连续可微函数 (或解析函数).

□

该定理表明：当 $u(t)$ 有一微小变化时，其对应的新方程的解在其共同的定义域上，与原方程的解充分的接近.

微分方程初值问题解的存在唯一性，解对参数的连续性和可微性等一组定理，称为微分方程的适应性理论，它们是整个微分方程的理论基础.

一般地研究控制系统的状态方程 $\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t)$ 不是一件容易的事情. 为此，我们需要按照系统方程的不同的属性，不同的特征对系统进行分类. 我们将按系统右端函数 $f(x(t),u(t),t)$ 是否显含 t, 以及 x 出现的方式是一次的还是高次的或其它非线性函数，可将系统分为以下四种基本类型.

§ 2.1.2 **线性控制系统的运动分析**

对于线性系统，描述其状态运动过程的状态方程

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\quad x(t_0)=x_0,\ \ t\in[t_0,t_a] \tag{1.4}$$

或

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad x(0)=x_0,\ \ t\geq 0 \tag{1.5}$$

(1.4) 是线性时变系统，(1.5) 是线性定常系统. 分析系统的运动的目的，就是要从其数学模型出发，来定量地和精确地定出系统运动的变化规律，以便为系统的实际运动过程作出估计. 从数学上看，这可归结为对于给定的初始状态 x_0 和外部输入作用 u ，求解出状态方程 (1.1) 或 (1.2) 的解 $x(t)$, 即获得由系统的初始状态和外部输入作用所引起的系统的响应.

尽管系统的运动是对初始状态和外部输入作用的响应，但运动的形态主要是由系统的结构和参数所决定的，即由系数矩阵对 $(A(t),B(t))$ 或 (A,B) 所决定的. 状态方程的解 $x(t)$ 给出了系统运动

形态对系统的结构和参数的依赖关系. 利用这一关系，我们可以分析系统的结构特征，或者通过引入附加的部分改变系统的参数或结构使系统运动形态在性能上达到期望的要求.

从数学上看，当系统的状态方程中的系数矩阵和输入作用满足一定的假设，以保证状态方程满足初始条件的解存在且唯一时对系统的运动的分析才是有意义的. 以下，我们总是在保证状态方程的解存在唯一的前提下分析系统状态的运动规律.

线性系统的一个基本属性是其满足叠加原理. 利用这一属性，不妨把系统在初始状态和输入向量作用下的运动分解为两个单独的分运动，即由初始状态引起的自由运动和由输入作用引起的强迫运动. 自由运动就是系统 (1.4) (或 (1.5)) 的自治方程：

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),\ \ x(t_0) = x_0,\ \ \ t \in [t_0, t_a] \tag{1.3}$$

的解用 $\phi(t, x_0, 0, t_0)$ 来表示，并称其为零输入响应. 强迫运动则是系统 (1.1)(或 (1.2)) 在零初始状态下的强迫方程

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ \ x(t_0) = 0,\ \ t \in [t_0, t_a] \tag{1.4}$$

的解，用 $\phi(t, 0, u, t_0)$ 来表示，称之为零状态响应. 系统由初始状态和输入作用所引起的整个响应 $\phi(t, x_0, u, t_0,)$ 就是两者的叠加，即：

$$\phi(t, x_0, u, t_0) = \phi(t, x_0, 0, t_0) + \phi(t, 0, u, t_0) \tag{1.5}$$

以下各节的分析将会看到,这样做无论是对简化分析的过程还是对增加讨论的直观性,都是很有益的.

§2.2 线性控制系统的状态方程求解

§2.2.1 线性时变系统的状态转移矩阵

我们知道，一般来说，对于任意给定时刻 t, 系统对应一个状态向量 $x(t)$, 而每个状态向量对应着状态空间中的一个点. 这样，不同的时刻对应着状态空间不同的点. 随着时间的推移，状态向量将在状态空间描绘出一条轨线. 同时，由线性微分方程组的解的存在唯一性定理可知：方程 $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ 的一般解是一个曲线族，对于给定的初始条件，只有一条状态轨线满足方程.

另一方面，一个状态向量是一个 n 维向量，一个 $(n \times n)$ 矩阵乘以一个 n 维向量将得到另一个 n 维向量，这就出现了一个可以想象的问题：是否存在这样的矩阵 (一般说来是与时间 t 有关的). 它和某一状态向量 $x(t_0)$ 相乘之后得到另一个状态向量 $x(t)$, 并且其端点落在通过 $x(t_0)$ 的状态轨迹上？

先假设这样的矩阵存在，并用 $\Phi(t,t_0)$ 表示，于是

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0) \tag{2.1}$$

并且满足微分方程：

$$\dot{x}=A(t)x(t) \tag{2.2}$$

即： $\dot{x}(t)=\dot{\Phi}(t,t_0)x(t_0)=A\Phi(t,t_0)x(t_0)$. 注意到 $x(t_0)$ 是任意初始向量，则

$$\dot{\Phi}(t,t_0)=A(t)\Phi(t,t_0) \tag{2.3}$$

另一方面，由 $x(t_0)=\Phi(t_0,t_0)x(t_0)$ 可知：

$$\Phi(t_0,t_0)=I_n \tag{2.4}$$

其中 I_n 表示 n 阶单位矩阵. 这样，就得到一个矩阵微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t,t_0) & = & A(t)\Phi(t,t_0) \\ \Phi(t_0,t_0) & = & I_n \end{cases} \tag{2.5}$$

只要得到上述初值问题的一个解 $\Phi(t,t_0)$, 就可以利用这个矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 通过 (2.1) 式的到另一个状态向量 $x(t)$, 它就是方程 (2.2) 的解, 并且其端点和 $x(t_0)$ 的端点落在同一条轨迹上, 这样的矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 称为状态转移矩阵.

设 $\Phi(t,t_0)$ 的每一列用向量 $\varphi_i(t,t_0)$ 表示，即：

$$\Phi(t,t_0)=(\varphi_1(t,t_0),\ \varphi_2(t,t_0),\ \cdots,\ \varphi_n(t,t_0)) \tag{2.6}$$

于是，由 (2.5) 可知

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_i(t,t_0) & = & A(t)\varphi_i(t,t_0), & \\ \varphi_i(t_0,t_0) & = & e_i, & i=1,2\cdots n, \end{cases} \tag{2.7}$$

其中， $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为 n 维实向量空间 R^n 的 n 个单位向量. 因此，可以认为转移矩阵由这样 n 个列向量构成：它们都是齐次方程 (2.2) 的解，其初值分别为 n 维状态空间的各个单位向量.

由于线性系统 (1.1) 的状态方程的齐次形式 (2.2) 不包含输入量 $u(t)$, 所以它描述了系统的内部关系. 因此，转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 是系统在状态空间自由演变过程的描述，它取决于系统的内部特性，由 (2.6) 可见，转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 由系统的矩阵 $A(t)$ 完全决定.

定理 2.2.1 转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 具有以下性质：

(1) $\Phi(t_0,t_0)=I$,

(2) $\Phi(t,t_1)\Phi(t_1,t_0)=\Phi(t,t_0)$,

(3) $\Phi(t,t_0)$ 是非奇异矩阵，并且 $\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t)$.

证明: (1) 是显然的. 现证明 (2), 在 (2.1) 式中考虑初始条件分别为 $x(t_0)$ 和 $x(t_1)$ 的情况，则

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0)=\Phi(t,t_1)x(t_1)$$

而在 $x(t_1)$ 与 $x(t_0)$ 之间，又有 $x(t_1)=\Phi(t_1,t_0)x(t_0)$ 代入上式，可得：

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0)=\Phi(t,t_1)\Phi(t_1,t_0)x(t_0)$$

因此，由初始状态 $x(t_0)$ 选取的任意性可得

$$\Phi(t,t_0)=\Phi(t,t_1)\Phi(t_1,t_0).$$

下面证明性质 (3). 由性质 (1) 、 (2) 可知 $\Phi(t,t_0)$ 是非奇异矩阵，由逆矩阵性质：

$$\Phi^{-1}(t,t_0)\Phi(t,t_0)=I$$

再由性质 (1) 和性质 (2) 可知：

$$\Phi^{-1}(t,t_0)\Phi(t,t_0)=\Phi(t_0,t_0)=\Phi(t_0,t)\Phi(t,t_0)$$

再由 $\Phi(t,t_0)$ 的非奇异性可知：

$$\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t).$$

□

§ 2.2.2 线性时变系统的状态方程求解

考虑如下的线性时变系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\ \ x(t_0)=x_0,\ t\in[t_0,t_a] \\ y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t) \end{cases} \tag{2.8}$$

采用待定函数法，设状态方程的一般解为

$$x(t)=\Phi(t,t_0)h(t), \tag{2.9}$$

微分上式两边可得：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \dot{\Phi}(t,t_0)h(t)+\Phi(t,t_0)\dot{h}(t)\\ &= A(t)\Phi(t,t_0)h(t)+\Phi(t,t_0)\dot{h}(t)\\ &= A(t)x(t)+\Phi(t,t_0)\dot{h}(t)\end{aligned}$$

与 (2.8) 的状态方程相比较可知：

$$\Phi(t,t_0)\dot{h}(t)=B(t)u(t)$$

即：

$$\dot{h}(t)=\Phi^{-1}(t,t_0)B(t)u(t) \tag{2.10}$$

再注意到 $x(t_0)=\Phi(t_0,t_0)h(t_0)=h(t_0)=x_0$, 因此

$$h(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau,t_0)B(\tau)u(\tau)d\tau \tag{2.11}$$

从而

$$\begin{aligned}x(t) &= \Phi(t,t_0)h(t)=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,t_0)\Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\\ &= \Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{2.12}$$

从 (2.12) 可见，线性时变系统的状态方程的解由两部分迭加而成，右端第一项表示系统在状态空间的自由演变，第二项表示输入量对状态转移过程的影响，它是通过系统内部特性 (由 $\Phi(t,t_0)$ 或 $A(t)$ 来描述) 以及系统和输入量的相互关系 $B(t)$ 来实现. 利用 (2.12) 可以得到系统的输出向量 $y(t)$ 为：

$$y(t)=C(t)\Phi(t,t_0)x_0+C(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau+D(t)u(t) \tag{2.13}$$

定理 2.2.2 线性时变系统 (2.1) 的状态方程由初始状态和输入作用所引起的整个响应为

$$\phi(t,x_0,u,t_0) \quad = \quad x(t) \quad = \quad \Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,\ t\in[t_0,t_a] \tag{2.14}$$

其中系统的零输入响应为：

$$\phi(t,x_0,0,t_0)=\Phi(t,t_0)x_0,\ t\in[t_0,t_a] \tag{2.15}$$

系统的零状态响应为：

$$\phi(t,0,u,t_0)=\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,\ t\in[t_0,t_a]. \tag{2.16}$$

□

在上述讨论中，我们已经看到，转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 在系统的研究中具有非常重要的作用．问题是：怎样计算转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 呢？先做如下的分析：对于由 (2.2) 所示的齐次向量方程式

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{2.2}$$

我们先来研究与此对应的函数方程 $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$, 其解为

$$x(t) = (e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau})x(t_0),$$

那么我们猜测对于上述齐次向量方程也有解

$$x(t) = (e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau})x(t_0), \tag{2.17}$$

那么 (2.17) 式是否真的是 (2.2) 的解呢？利用矩阵指数函数的无穷级数定义

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(At)^n + \cdots. \tag{2.18}$$

代入 (2.17) 可知

$$x(t) = \left[I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \frac{1}{2!}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right)^n + \cdots\right]x(t_0),$$

上式两边对 t 微分就得到下式：

$$\dot{x}(t) = \left\{A(t) + \frac{1}{2}\left(A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau A(t)\right) + \cdots\right\}x(t_0).$$

另一方面，由方程 (2.2) 可知

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t)\\ &= A(t)\left[I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \frac{1}{2!}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right)^n + \cdots\right]x(t_0),\end{aligned}$$

一般来说以上两式右边不相等．为了能使它们相等，必须有：

$$A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau \cdot A(t),$$

即 $\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$ 和 $A(t)$ 必须是可交换的．而为了使 $\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$ 和 $A(t)$ 可交换，下式必须在任意时刻都成立

$$A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau A(t) = \int_{t_0}^{t}[A(t)A(\tau) - A(\tau)A(t)]d\tau = 0.$$

也就是，对任意时刻 t_1 和 t_2, 下式成立

$$A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1), \tag{2.19}$$

这就是 (2.17) 为方程 (2.2) 的解的充分必要条件. 因此，如果条件 (2.19) 满足，那么由 (2.1),(2.17) 可知转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 可表示为

$$\Phi(t,t_0) \;=\; e^{\displaystyle\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} \;=\; I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \frac{1}{2!}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right)^2 + \cdots \tag{2.20}$$

下面的问题是:如果矩阵 $A(t)$ 不满足条件 (2.19), 那么怎么求转移矩阵呢？当给定初始条件 $x(t_0)$ 时，对方程 (2.2) 两边积分可得：

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(\tau)x(\tau)d\tau \tag{2.21}$$

上式是向量积分方程，把上式依次代入等式右边的 $x(\tau)$ 就能求解此方程式. 例如，第一次代入时，(2.21) 式变为

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\left[x(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} A(\lambda)x(\lambda)d\lambda\right]d\tau.$$

为了说明方便起见，引入如下的积分算子

$$Q(\cdot) = \int_{t_0}^{t} (\cdot)d\tau \tag{2.22}$$

反复使用这个积分算子，(2.21) 式可以表示为：

$$x(t) = [I + Q(A) + Q(AQ(A)) + Q(AQ(AQ(A))) + \cdots]x(t_0).$$

如果 A 的元素在积分区间内有界，这个无穷级数就绝对收敛，在这种情况下，记方阵：

$$G(A) = I + Q(A) + Q(AQ(A)) + \cdots. \tag{2.23}$$

上式两边关于 t 求导. 注意到算子 Q 的定义，则有 $G(A(t_0)) = I_n$, 并且,

$$\frac{d}{dt}G(A) = A + AQ(A) + AQ(AQ(A)) + \cdots = AG(A).$$

可见 $G(A)$ 是方程 (2.2) 的一个解. 因此，所求的转移矩阵为

$$\Phi(t,t_0) = G(A), \tag{2.24}$$

并且

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0)=G(A)x(t_0).$$

总之，我们有以下定理

定理 2.2.3 若线性时变系统 (2.1) 的系统矩阵 $A(t)$ 的元素在区间 $[t_0,t_a]$ 上有界，那么系统的状态转移矩阵 $\Phi(t,t_0)=G(A)=I+Q(A)+Q(AQ(A))+\cdots$, 其中，积分算子 Q 由 (2.22) 给出. 进一步，若系统矩阵 $A(t)$ 满足对任意时刻 $t_1,t_2\in[t_0,t_a]$, 都有 $A(t_1)A(t_2)=A(t_2)A(t_1)$, 那么系统的状态转移矩阵

$$\Phi(t,t_0) \;=\; e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau} \;=\; I+\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau+\frac{1}{2!}\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^2+\cdots$$

□

例 2.2.1 求如下时变系统在已知初始状态和阶跃输入下的状态响应.

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{(t+1)^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0\\ t+1\end{pmatrix}u(t),\ x(0)=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

解：首先检验矩阵 $A(t)=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{(t+1)^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 与 $\displaystyle\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau$ 是否交换. 因为任取 t_1,t_2 有

$$\begin{aligned}
A(t_1)A(t_2) &= \begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{(t_1+1)^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{(t_2+1)^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0\\
A(t_2)A(t_1) &= \begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{(t_2+1)^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{(t_1+1)^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0
\end{aligned}$$

即

$$A(t_1)A(t_2)=A(t_2)A(t_1).$$

所以矩阵 $A(t)$ 与 $\displaystyle\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau$ 满足可交换条件，因此可由 (2.20) 式来计算状态转移矩阵.

$$\Phi(t,t_0) \;=\; e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau} \;=\; I+\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{(\tau+1)^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}d\tau+\frac{1}{2!}\left[\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{(\tau+1)^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}d\tau\right]^2+\cdots$$

由于

$$\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{(\tau+1)^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

而

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = 0, \ \ (k = 2, 3, \cdots)$$

所以

$$\Phi(t, t_0) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此由定理 2.2.2 可知该系统在已知初始状态和阶跃输入下的状态响应为

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t,0)x(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{t}{(t+1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{t-\tau}{(t+1)(\tau+1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau+1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{2t+1}{t+1} \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \dfrac{t-\tau}{t+1} \\ \tau+1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \dfrac{t^2+4t+2}{2(t+1)} \\ \dfrac{t^2+2t+2}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

§ 2.2.3 线性定常系统的状态方程求解

考虑如下的线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \ \ x(t_0) = x_0, \ t \in [t_0, t_a], \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases} \tag{2.25}$$

由于 A 是一个数值矩阵，必满足上式交换条件 (2.19). 因此，由 (2.20) 可知，转移矩阵，

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= e^{\int_{t_0}^t A d\tau} = e^{A(t-t_0)} \\ &= I + A(t-t_0) + A^2 \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \cdots + A^n \frac{(t-t_0)^n}{n!} + \cdots. \end{aligned} \tag{2.26}$$

于是我们获得以下定理.

定理 2.2.4 线性定常系统 (2.2) 的状态方程由初始状态和输入作用所引起的整个响应为：

$$\phi(t, x_0, u, t_0) = x(t) \ = \ e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad, \ t \in [t_0, t_a]. \tag{2.27}$$

其中，系统的零输入响应为：

$$\phi(t, x_0, 0, t_0) = e^{A(t-t_0)}x_0, \ \ t \in [t_0, t_a],$$

系统的零状态响应为:

$$\phi(t,0,u,t_0)=\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,\ t\in[t_0,t_a].$$

特别当 $t_0=0$ 时,

$$\begin{cases} x(t) &= e^{At}\left[x_0+\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\right], \\ y(t) &= Ce^{At}\left[x_0+\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\right]+Du(t), \quad t\geq 0. \end{cases}$$

证明：事实上，注意到系统矩阵 A 是数值矩阵，由定理 2.2.2 直接可以得到这个结果．下面我们给出另外一种证明方法．当输入 $u(t)=0$ 时，先求解齐次状态方程 $\dot{x}(t)=Ax(t)$．设解向量是 t 的向量幂级数

$$x(t)=b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n+\cdots$$

其中， $b_0,b_1,\cdots,b_n,\cdots$ 都是 n 维向量，则

$$\dot{x}(t)=b_1+2b_2t+\cdots+nb_nt^{n-1}+\cdots=A(b_0+b_1t+\cdots+b_nt^n+\cdots)$$

比较对应项系数关系可得

$$b_1=Ab_0,\ b_2=\frac{1}{2}A^2b_0,\ \cdots,\ b_n=\frac{1}{n!}A^nb_0,\ \cdots$$

由于 $x(0)=b_0$, 所以

$$x(t)=\left(I+At+\frac{1}{2}(At)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(At)^n+\cdots\right)x(0)=e^{At}x(0)$$

对应线性定常系统 (2.2), 其状态转移矩阵 $\Phi(t,0)=\Phi(t)=e^{At}$. 当输入 $u(t)\neq 0$, 由系统的状态方程 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$ 可得

$$e^{-At}(\dot{x}(t)-Ax(t))=e^{-At}Bu(t)$$

另一方面,

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t))=-Ae^{-At}x(t)+e^{-At}\dot{x}(t)=e^{-At}(\dot{x}(t)-Ax(t))=e^{-At}Bu(t)$$

于是

$$e^{-At}x(t)-e^{-At_0}x(t_0)=\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

即

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau=\Phi(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau.$$

□

对于线性定常系统 (2.25) 的状态矩阵 $\Phi(t)=e^{At}$, 直接可以验证，还有以下性质成立.

定理 2.2.5 (i) $\Phi(t_1+t_2)=\Phi(t_1)\Phi(t_2)=\Phi(t_2)\Phi(t_1)$;

(ii) $[\Phi(t)]^k=\Phi(kt)$;

(iii) 对于 n 阶方阵 A,B, 如果 $AB=BA$, 那么 $e^{(A+B)t}=e^{At}\cdot e^{Bt}$.

□

定理 2.2.6 设 $P:\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$ 是状态空间的一个等价变换，使得 $x(t)=P\bar{x}(t)$, 那么，线性定常系统 $\dot{x}(t)=Ax(t)$ 与 $\dot{\bar{x}}(t)=\overline{A\bar{x}(t)\text{ 的状态转移矩阵 }\Phi(t)\text{ 与 }}\bar{\Phi}(t)$ 之间满足以下关系

$$\bar{\Phi}(t)=P^{-1}\Phi(t)P.$$

证明：在等价变换下， $\bar{A}=P^{-1}AP$, 所以

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}(t) &= e^{\bar{A}t}=e^{(P^{-1}AP)t}\\
&= I+(P^{-1}AP)t+\frac{1}{2!}(P^{-1}AP)^2t^2+\cdots+\frac{1}{n!}(P^{-1}AP)^nt^n+\cdots\\
&= P^{-1}(I+At+\frac{1}{2!}(At)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(At)^n+\cdots)P\\
&= P^{-1}e^{At}P=P^{-1}\Phi(t)P.
\end{aligned}$$

□

下面我们给出矩阵指数函数 e^{At} 的一些常用计算方法.

方法 1(直接计算法) 直接利用定义关系式：

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{n!}A^nt^n+\cdots,$$

在计算中, 对无穷级数必须考虑其对收敛性的要求. 可以证明, 对所有数值矩阵 A 和有限的 t 来说, 级数一定是收敛的. 通常，这一方法只能得到 e^{At} 的数值结果，一般难以获得其函数表达式，并且这种方法计算 e^{At} 的精确度取决于所取的项数. 当运用计算机进行计算时, 这种方法具有编程方便和计算简单的优点.

方法 2(对角形法和约当形法)

(1) 如果系统矩阵 A 具有 n 个两两互异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则存在变换矩阵 P 及其逆阵 P^{-1}, 使得：

$$A=P\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P^{-1}$$

从而：

$$e^{At}=P\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\ddots,e^{\lambda_n t},)P^{-1}. \tag{2.28}$$

事实上，注意到

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(P\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right)P^{-1}\right)^k t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}P\mathrm{diag}\left(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k\right)P^{-1}t^k \\
&= P\mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}{\lambda_1}^k t^k,\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_2^k t^k,\cdots,\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_n^k t^k\right)P^{-1} \\
&= P\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_n t}\right)P^{-1}
\end{aligned}$$

例 2.2.2 试求系统矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-6&-11&6\\-6&-11&5\end{pmatrix}$ 的矩阵指数函数.

解： 首先由矩阵 A 的特征方程 $\mid \lambda I-A\mid=0$ 求得系统的特征值为

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=-3.$$

然后由线性方程组 $(\lambda_i I-A)p_i=0,\ (i=1,2,3)$ 求得与矩阵 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 所对应的特征向量分别为

$$p_1=\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}^T,\ p_2=\begin{pmatrix}1&2&4\end{pmatrix}^T,\ p_3=\begin{pmatrix}1&6&9\end{pmatrix}^T.$$

故将 A 变换成对角线矩阵的变换矩阵 P 及其逆矩阵 P^{-1} 分别为

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&6\\1&4&9\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}3&5/2&-2\\-3&-4&3\\1&3/2&-1\end{pmatrix},$$

即

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}.$$

所以由 (2.28) 式可知

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= P\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t} & 5e^{-t}/2-4e^{-2t}+3e^{-3t}/2 & -2e^{-t}+3e^{-2t}-e^{-3t} \\ -6e^{-2t}+6e^{-3t} & -8e^{-2t}+9e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t} \\ 3e^{-t}-12e^{-2t}+9e^{-3t} & 5e^{-t}/2-16e^{-2t}+27e^{-3t}/2 & -2e^{-t}+12e^{-2t}-9e^{-3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

(2) 如果系统矩阵 A 有重特征值，分为以下两种情况

(i) 设系统矩阵 A 有 n 重特征根 λ, 则存在变换矩阵 P 及其逆矩阵 P^{-1}, 使得

$$
A = P\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} P^{-1},
$$

从而

$$
e^{At} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t} \\ & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^{\lambda t} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & te^{\lambda t} \\ & & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix} P^{-1}.
$$

事实上，记 $J_n = \lambda I_n + U_{n-1}$，$U_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$，$U_{n-1}$ 是一个 n 阶幂零矩阵，

$U_{n-1}^2=U_{n-2}$, $U_{n-1}^n=O_n$, O_n 是 n 阶零矩阵.

$$\begin{aligned}
e^{U_{n-1}t} &= I+U_{n-1}t+\frac{1}{2!}(U_{n-1}t)^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}(U_{n-1}t)^{n-1}\\
&= I+U_{n-1}t+\frac{1}{2!}U_{n-2}t^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}U_1t^{n-1}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}\\ & \cdots & & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{J_nt} &= e^{(\lambda I_n+U_{n-1})t}=e^{\lambda I_nt}\cdot e^{U_{n-1}t}\\
&= \mathrm{diag}(e^{\lambda t},e^{\lambda t},\cdots,e^{\lambda t})\cdot e^{U_{n-1}t}\\
&= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t}\\ & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^{\lambda t}\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & \ddots & te^{\lambda t}\\ & & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

如果 $A=PJ_nP^{-1}$, 那么

$$\Phi(t)=e^{At}=e^{PJ_nP^{-1}t}=Pe^{J_nt}P^{-1}.$$

(ii) 当系统矩阵 A 有 m_1 重特征根 λ_1, m_2 重特征根 $\lambda_2,\cdots$, 等情况, 理论上也可以给出类似的公式, 但其形式要复杂的多. 例如, 设 A 具有相异的特征值 λ_1(三重) 和 λ_2(二重), 并且可以找到变换矩阵 P 及其 P^{-1}, 使其化为约当形

$$A=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

则相应的矩阵指数函数为：

$$e^{At}=P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}P^{-1}$$

例 2.2.3 试求系统矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 的矩阵指数函数.

解：首先由系统矩阵 A 的特征方程 $\mid \lambda I-A \mid=0$ 求得系统的特征值为

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=-1,$$

即存在一个二重根 -1. 由于矩阵 A 为友矩阵，故将 A 变换成约当矩阵的变换矩阵 P 及其逆矩阵 P^{-1} 分别为

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 8 & -2 & -1 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

即 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 于是矩阵 A 的状态转移矩阵为

$$\begin{aligned} e^{At} &= P\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} e^{2t}+(8+6t)e^{-t} & 2e^{2t}+(-2+3t)e^{-t} & e^{2t}+(-1-3t)e^{-t} \\ 2e^{2t}-(2+6t)e^{-t} & 4e^{2t}+(5-3t)e^{-t} & 2e^{2t}+(-2+3t)e^{-t} \\ 4e^{2t}+(-4+6t)e^{-t} & 8e^{2t}+(-8+3t)e^{-t} & 4e^{2t}+(5-3t)e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

方法 3 (化为 A 的有限项法) 把 e^{At} 表示为 $A^k(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 的一个多项式，即

$$e^{At}=a_0(t)I+a_1(t)A+\cdots+a_{n-1}(t)A^{n-1} \tag{2.29}$$

其中 $a_i(t),\ i=0,1,\cdots,n-1$ 均为时间 t 的数量函数. 那么, 如果 A 具有 n 个两两互异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则

$$\begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

事实上, 注意到矩阵 A 的特征多项式

$$\sigma(s)=\det(sI-A)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0$$

由 Caley-Hamilton 定理 $\sigma(A)=0$ 可得:

$$A^n+\alpha_{n-1}A^{n-1}+\cdots+\alpha_1 A+\alpha_0 I=0$$

这表明 A^n 可表示为 $A^{n-1},\cdots,A,I$ 的线性组合,

$$A^n=-\alpha_{n-1}A^{n-1}-\cdots-\alpha_1 A-\alpha_0 I.$$

由命题 2.2 可知: e^{At} 的无穷多项表达式表示为 $A^{n-1},\cdots,A,I$ 的有限项表达式, 但其系数为时间 t 的函数, 即得 (2.29) 式. 进一步, 若 A 具有 n 个两两互异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 由 (2.29) 式可得:

$$\begin{cases} a_0(t)+a_1(t)\lambda_1+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1}=e^{\lambda_1 t} \\ a_0(t)+a_1(t)\lambda_2+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1}=e^{\lambda_2 t} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_0(t)+a_1(t)\lambda_n+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1}=e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

解此方程组可得 (2.30) 式.

如果系统矩阵 A 有重特征值时, 分以下两种情形.

(i) 当 λ_1 为 A 的 n 重特征值时

$$e^{\lambda_1 t}=a_0(t)+a_1(t)\lambda_1+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1}.$$

对此等式关于 λ_1 依次求 $n-1$ 次导数可得：

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} & = & a_0(t)+a_1(t)\lambda_1+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} \\ te^{\lambda_1 t} & = & a_1(t)+2a_2(t)\lambda_1+\cdots+(n-1)a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-2} \\ t^2e^{\lambda_1 t} & = & 2a_2(t)+(3\times 2)a_3(t)\lambda_1+\cdots+(n-1)(n-2)a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t^me^{\lambda_1 t} & = & m!a_m(t)+\cdots+(n-1)(n-2)\cdots(n-m)a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t^{n-1}e^{\lambda_1 t} & = & (n-1)!a_{n-1}(t) \end{cases}$$

解此方程组可得所求表达式

$$\begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & \cdots & (n-1)\lambda_1^{n-2} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & (n-1)(n-2)\lambda_1^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)! \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ te^{\lambda_1 t} \\ t^2e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ t^{n-1}e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

(ii) 当系统矩阵 A 有 m_1 重特征值 λ_1，m_2 重特征值 $\lambda_2, \cdots$，等情况，理论上也可以给出类似的计算，但其形式要复杂一些.

例 2.2.4 已知系统矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$，试用化 e^{At} 为 A 的有限项法求 e^{At}.

解：系统矩阵 A 的特征方程

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

的特征根为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$. 由 (2.31) 可写出如下方程组

$$\begin{cases} e^{-t} & = & a_0(t)-a_1(t)+a_2(t) \\ e^{-2t} & = & a_0(t)-2a_1(t)+4a_2(t) \\ e^{-3t} & = & a_0(t)-3a_1(t)+9a_2(t) \end{cases}$$

解此方程组即可求得各个系数

$$\begin{cases} a_0(t) & = & 3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t} \\ a_1(t) & = & \frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t} \\ a_2(t) & = & \frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t} \end{cases}$$

于是，由 (2.29) 即可得系统的状态转移矩阵

$$\begin{aligned}
e^{At} &= a_0(t)I + a_1(t)A + a_2(t)A^2 \\
&= \begin{pmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 6e^{-2t} - 3e^{-3t} & -\frac{5}{2}e^{-t} + 8e^{-2t} - \frac{9}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-3t} \\ 3e^{-t} - 12e^{-2t} + 9e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t} - 16e^{-2t} + \frac{27}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{9}{2}e^{-3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

方法 4 (Laplace 变换法)

对给定的定常矩阵 A, 先求出预解矩阵 $(sI - A)^{-1}$, 则：

$$e^{At} = \pounds^{-1}(sI - A)^{-1}. \tag{2.32}$$

事实上，对于 e^{At} 的定义式：

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \cdots$$

两边作 Laplace 变换可得：

$$\pounds[e^{At}] = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \cdots = (sI - A)^{-1}.$$

于是，对上式两边求 Laplace 逆变换可得 (2.32) 式.

例 2.2.5 若给定线性定常系统的自治方程为：

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x(t)$$

采用四种方法求矩阵指数函数 e^{At}

解：方法 1:

$$\begin{aligned}
e^{At} &= I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ -2t & -3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t^2 & -\dfrac{3}{2}t^2 \\ 3t^2 & \dfrac{7}{2}t^2 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 - t^2 + \cdots & t - \dfrac{3}{2}t^2 + \cdots \\ -2t + 3t^2 + \cdots & 1 - 3t + \dfrac{7}{2}t^2 + \cdots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

方法 2: 先求出 A 的特征值

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3) + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

所以 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$. 再求出使 A 化为对角线矩阵的变换矩阵

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

则矩阵指数函数 e^{At} 可表示为

$$\begin{aligned}
e^{At} &= P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

方法 3: 由上述已知 A 的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$ 于是

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}a_0(t)\\ a_1(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 1 & \lambda_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}e^{-t}\\ e^{-2t}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t}\\ e^{-2t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
e^{At} &= a_0(t)I+a_1(t)A\\
&= (2e^{-t}-e^{-2t})\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+(e^{-t}-e^{-2t})\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

方法 4: 先求出 A 的预解矩阵为

$$\begin{aligned}
(sI-A)^{-1} &= \begin{pmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\dfrac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\[2ex] \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{-1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}+\dfrac{-1}{s+2}\\[2ex] \dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

于是，对上式两边做 Laplace 逆变换可得：

$$
e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}
$$

例 2.2.5 已知连续系统的状态转移矩阵是

$$
\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-2t)e^{-2t} & 4te^{-2t} \\ 0 & -te^{-2t} & (1+2t)e^{-2t} \end{pmatrix}
$$

试确定系统矩阵 A.

解：由 $\ddot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$, $\Phi(0) = I$ 得

$$
A = \dot{\Phi}(0) = \begin{pmatrix} -e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & -2e^{-2t} - 2(1-2t)e^{-2t} & 4e^{-2t} - 8te^{-2t} \\ 0 & -e^{-2t} + 2te^{-2t} & 2e^{-2t} - 2(1+2t)e^{-2t} \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

例 2.2.6 已知 $\dot{x}(t) = Ax(t)$, 当 $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 时，状态方程得解为 $x(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$, 而当 $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 时，状态方程的解为 $x(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$, 试求状态转移矩阵 $\Phi(t)$.

解：由奇次状态方程的解为 $x(t) = \Phi(t)x(0)$ 可知

$$
\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

即

$$
\begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}
$$

所以

$$
\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}
$$

补充：最小多项式

最小多项式的概念很重要．在证明了凯莱 - 哈密尔顿定理之后，可对最小多项式作如下定义．

设系统矩阵 A 是 $n\times n$ 矩阵，其特征多项式为

$$| sI-A |= s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$$

根据凯莱 - 哈密尔顿定理， A 必满足其自身的零化多项式，即

$$A^n+a_1A^{n-1}+a_2A^{n-2}+\cdots+a_{n-1}A+a_nI=0$$

但是上式并不一定就是 A 所满足的幂次最低的零化多项式.

对于以 A 为根的幂次最低的零化多项式，称为 A 的最小多项式，用 $\varphi(s)$ 表示. 或者说， A 的最小多项式 $\varphi(s)$ 定义为满足 $\varphi(A)=0$ 的一个幂次最低的多项式，即

$$\varphi(s)=s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m$$

并且

$$\varphi(A)=A^m+b_1A^{m-1}+\cdots+b_{m-1}A+b_mI=0$$

其中 $m\le n$.

最小多项式的求法：首先将伴随矩阵 $adj(sI-A)$ 的各元变成因子相乘的多项式，然后找出 $adj(sI-A)$ 各元的最大公因子 $d(s).d(s)$ 也是一个多项式，但其最高幂次项的系数应为 1, 则矩阵 A 的最小多项式为

$$\varphi(s)=\frac{| sI-A |}{d(s)}.$$

但如果 $adj(sI-A)$ 的所有元中不存在最大公因式，即 $d(s)=1$, 则 $\varphi(s)$ 就是 A 的特征多项式 $| sI-A |$.

例 2.2.7 已知系统矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&3&1\end{pmatrix}$ 试求其最小多项式.

解：因为 $| sI-A |=(s-2)^2(s-1)$,

$$adj(sI-A)=\begin{pmatrix}(s-2)(s-1)&0&0\\0&(s-2)(s-1)&0\\0&3(s-2)&(s-2)^2\end{pmatrix}$$

所以

$$\varphi(s)=\frac{| sI-A |}{ds}=\frac{(s-2)^2(s-1)}{s-2}=s^2-3s+2$$

进一步验证 $\varphi(A)=0$, 由于

$$
\begin{aligned}
\varphi(A) &= A^2-3A+2I \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

可见， A 的最小多项式幂次比其多项式幂次低了一次.

§2.3 离散系统的状态方程求解

§ 2.3.1 线性连续系统的离散化

在使用数字计算机对连续系统进行分析和实时控制时，就会遇到将一个连续的系统化为等价的离散系统的问题. 在一定的假设下 (如，采样周期比较小，系统具有零阶保持特性等), 可以将线性连续的控制系统状态空间表示化为线性离散的控制系统的状态空间表示.

首先考虑线性时变系统

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = A(t)x(t)+B(t)u(t), & x(t_0)=x_0 \\
y(t) = C(t)x(t)+D(t)u(t), & t\in[t_0,t_a]
\end{cases}
$$

设采样周期为 T, 采样时刻为 $kT(k=0,1,2,\cdots)$, 分别记 $x(k)=x(kT), u(k)=u(kT), y(k)=y(kT)$. 由于线性时变系统的状态方程的解为

$$
x(t)=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau
$$

其中 $\Phi(t,t_0)$ 为系统的状态转移矩阵. 令 $t=(k+1)T$, t_0 对应于 $k=0$, 并且在 $t\in[kT,(k+1)T]$ 时均有 $u(t)=u(k)$, 于是

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \Phi((k+1)T,0)x_0+\int_0^{(k+1)T}\Phi((k+1)T,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\
&= \Phi((k+1)T,kT)\Phi(kT,0)x_0+\int_0^{kT}\Phi((k+1)T,kT)\Phi(kT,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\
&\quad +\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi((k+1)T,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\
&= \Phi((k+1)T,kT)\left[\Phi(kT,0)x_0+\int_0^{kT}\Phi(kT,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right] \\
&\quad +\left[\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi((k+1)T,\tau)B(\tau)d\tau\right]u(k) \\
&= \Phi((k+1)T,kT)x(k)+\left[\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi((k+1)T,\tau)B(\tau)d\tau\right]u(k).
\end{aligned}
$$

这样，只要取

$$G(k)=\Phi((k+1)T,kT),\ \ H(k)=\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi((k+1)T,\tau)B(\tau)d\tau, \tag{$*$}$$

就可以将线性时变系统的状态方程化为

$$x(k+1)=G(k)x(k)+H(k)u(k). \tag{3.1}$$

由于系统的输出方程是一个线性方程, 在采样时刻 kT, 系统的离散输出 $y(k)$ 与系统的离散状态 $x(k)$ 和离散输入 $u(k)$ 仍然保持原有的线性关系. 若记 $C(k)=C(kT),\ D(k)=D(kT)$, 那么

$$y(k)=C(k)x(k)+D(k)u(k).$$

如果考虑线性定常系统 $\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}(t) & = & Ax(t)+Bu(t),\quad x(0)=x_0\\ y(t) & = & Cx(t)+Du(t),\quad t\geq 0\end{array}\right.$, 此时

$$\begin{aligned}G(k) &= \Phi((k+1)T,kT)=\Phi((k+1)T-kT)=\Phi(T)=e^{AT}=G\\ H(k) &= \int_{kT}^{(k+1)T}\Phi((k+1)T,\tau)Bd\tau=(\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi((k+1)T-\tau)d\tau)B\\ &= (-\int_{T}^{0}\Phi(t)dt)B=(\int_0^T e^{At}dt)B=H\end{aligned}$$

所以，系统的离散化的状态空间表示为

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k),\ \ y(k)=Cx(k)+Du(k),$$

其中 $G=e^{AT},\ H=(\int_0^T e^{At}dt)B$

由于

$$\begin{aligned}G &= e^{AT}=I+TA+(TA)^2+\cdots\\ H &= \left(\int_0^T(I+At+(At)^2+\cdots)dt\right)B=TB+\frac{T^2}{2}AB+\cdots\end{aligned} \tag{$**$}$$

所以，在实际应用中，当采样周期 T 比较小，在满足所要求精度的前提下，可以近似的取

$$G=I+TA,\ \ H=TB.$$

总之我们有以下定理.

定理 2.3.1 线性时变系统 (2.1) 在一定的条件下，可以化为以下的线性时变离散系统

$$x(k+1)=G(k)x(k)+H(k)u(k),\quad y(k)=C(k)x(k)+D(k)u(k)$$

其中， $G(k)$ 和 $H(k)$ 由 $(*)$ 给出．如果考虑线性定常系统 (2.2), 那么，离散化的系统为

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k),\ \ y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

其中 G 和 H 由 $(**)$ 给出.

$\square$

例 2.3.1 试写出下列线性时变连续系统的离散化系统的状态方程.

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{(t+1)^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

解：由例 2.2.1 可知该系统的状态转移矩阵为

$$\Phi(t, t_0) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{t - t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此由 $(*)$ 分别计算

$$\begin{aligned} G(k) &= \Phi((k+1)T, kT) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{T}{(kT+T+1)(kT+1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ H(k) &= \int_{kT}^{(k+1)T} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{kT+T-\tau}{(kT+T+1)(\tau+1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int_{kT}^{(k+1)T} \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{kT+T-\tau}{(kT+T+1)(\tau+1)} \\ 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \dfrac{(k+1)T^2}{(k+1)T+1} + ln\dfrac{(k+1)T+1}{kT+1} \\ T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

将 $G(k)$ 和 $H(k)$ 代入 (2.2) 式，即可得原系统的离散化状态方程为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= G(k)x(k) + H(k)u(k) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{T}{(kT+T+1)(kT+1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} \dfrac{(k+1)T^2}{(k+1)T+1} + ln\dfrac{(k+1)T+1}{kT+1} \\ T \end{pmatrix} u(k) \end{aligned}$$

$\square$

§ 2.3.2 线性离散系统的状态方程求解

下面考虑线性时变离散系统的状态方程

$$x(k+1) = G(k)x(k) + H(k)u(k),\ x(0) = x_0,\ \ k = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.2}$$

和线性定常离散系统的状态方程

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k),\ x(0)=x_0,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{3.3}$$

的求解问题.

1. **迭代法求解**

由于这些方程都是线性差分方程，对于给定的系统的初始状态 $x(0)=x_0$, 以及各采样时刻的输入 $u(0)$, $u(1)$, $u(2),\cdots$, 可以用系统的状态逐步迭代递推的方法求出状态方程的解. 迭代法是一种递推的数值解法，当给定初始状态及输入函数，将其代入方程式，采用迭代运算可求得方程在各个采样时刻的数值解. 这种方法特别适用于计算机求解.

首先，对于线性离散系统给出状态转移矩阵. 对于线性时变离散系统的状态方程 (3.2), 系统的状态转移矩阵 $\Phi(k,m)$ 是下列矩阵差分方程的初值问题的解

$$\Phi(k+1,m)=G(k)\Phi(k,m),\ \Phi(m,m)=I_n,\quad k=m,m+1,\cdots,\ m=0,1,2,\cdots$$

采用递推迭代法，可以导出

$$\begin{cases}\Phi(m+1,m) & = & G(m)\Phi(m,m)=G(m),\\ \Phi(m+2,m) & = & G(m+1)\Phi(m+1,m)=G(m+1)G(m),\\ \cdots & \cdots & \cdots,\\ \Phi(k,m) & = & G(k-1)\Phi(k-1,m)=\cdots=G(k-1)G(k-2)\cdots G(m).\end{cases}$$

对于线性定常离散系统的状态方程 (3.3), 系统的状态转移矩阵 $\Phi(k-m)$ 是下列矩阵差分方程的初值问题的解.

$$\Phi(k-m+1)=G\Phi(k-m),\ \Phi(0)=I_n,\quad k=m,m+1,\cdots,\ m=0,1,2,\cdots$$

由于 $\Phi(1)=G\Phi(0)=G,\ \Phi(2)=G\Phi(1)=G^2,\cdots$, 所以

$$\Phi(k-m)=G^{k-m}. \tag{3.4}$$

下面，利用线性离散系统的状态转移矩阵，给出系统的状态方程解的表示.

定理 2.3.2 线性时变离散系统 (3.2) 的状态方程，由初始状态 $x(0)=x_0$ 和各采样时刻的输入 $u(k),\ k=0,1,2,\cdots$, 作用所引起的整个响应为

$$\phi(k,x_0,u,0)=x(k)=\Phi(k,0)x_0+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k,i+1)H(i)u(i). \tag{3.5}$$

其中，系统的零输入响应为：

$$\phi(k,x_0,0,0)=\Phi(k,0)x_0,$$

系统的零状态响应为：

$$\phi(k,0,u,0)=\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k,i+1)H(i)u(i).$$

证明：由线性时变离散系统 (3.2) 的状态方程，逐步迭代可得

$$\begin{aligned}
x(1) &= G(0)x(0)+H(0)u(0)=\Phi(1,0)x_0+H(0)u(0)\\
x(2) &= G(1)x(1)+H(1)u(1)=G(1)(G(0)x(0)+H(0)u(0))+H(1)u(1)\\
&= \Phi(2,0)x_0+\Phi(2,1)H(0)u(0)+\Phi(2,2)H(1)u(1)\\
\cdots &\ \cdots\ \cdots\\
x(k) &= G(k-1)x(k-1)+H(k-1)u(k-1)\\
&= G(k-1)\cdots G(0)x_0+G(k-1)\cdots G(1)H(0)u(0)\\
&\quad +\cdots+G(k-1)H(k-2)u(k-2)+H(k-1)u(k-1)\\
&= \Phi(k,0)x_0+\Phi(k,1)H(0)u(0)+\cdots+\Phi(k,k-1)H(k-2)u(k-2)+\\
&\quad \Phi(k,k)H(k-1)u(k-1)\\
&= \Phi(k,0)x_0+\textstyle\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k,i+1)H(i)u(i).
\end{aligned}$$

□

定理 2.3.3 线性定常离散系统 (3.3) 的状态方程，由初始状态 $x(0)=x_0$ 和各采样时刻的输入 $u(k)$，$k=0,1,2,\cdots$，作用所引起的整个响应为

$$\phi(k,x_0,u,0)=x(k)=\Phi(k)x_0+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k-i-1)Hu(i)=G^kx_0+\sum_{i=0}^{k-1}G^{k-i-1}Hu(i) \tag{3.6}$$

其中，系统的零输入响应为

$$\phi(k,x_0,0,0)=G^kx_0$$

系统的零状态响应为

$$\phi(k,0,u,0)=\sum_{i=0}^{k-1}G^{k-i-1}Hu(i)$$

证明：此时系统为定常系统，在上述定理中，注意到

$$\begin{cases}
\Phi(k,0) = \Phi(k-0)=\Phi(k)=G^k\\
\Phi(k,i+1) = \Phi(k-(i+1))=\Phi(k-i-1)=G^{k-i-1}
\end{cases}$$

再由 (3.5) 就可以得到 (3.6).

□

2. $z-$ **变换法求解**:

对于线性定常离散系统，其状态方程为

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

对上边两式取 $z-$ 变换，得

$$zX(z) - zx(0) = GX(z) + HU(z)$$

于是

$$X(z) = (zI - G)^{-1}zx(0) + (zI - G)^{-1}HU(z)$$

再对上式取 $z-$ 逆变换，得到

$$x(k) = \mathbf{Z}^{-1}[(zI - G)^{-1}z]x(0) + \mathbf{Z}^{-1}[(zI - G)^{-1}HU(z)] \tag{3.7}$$

比较 (3.6) 与 (3.7) 式可知

$$\begin{cases} \Phi(k) & = & \mathbf{Z}^{-1}[(zI - G)^{-1}z] \\ \sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k-i-1)Hu(i) & = & \mathbf{Z}^{-1}[(zI - G)^{-1}HU(z)] \end{cases} \tag{3.8}$$

例 2.3.2 已知某系统的状态方程和状态初始值分别为

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(k), \ \ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

试求系统状态在阶跃输入 $u(k) = 1$ 时的响应.

解: (1) 用递推法求解. 分别令 $k = 1, 2, 3, \cdots$, 则由状态方程有

$$\begin{aligned} x(1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.84 \end{pmatrix} \\ x(2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1.84 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.84 \\ -0.84 \end{pmatrix} \\ x(3) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.84 \\ -0.84 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.16 \\ 1.386 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

可继续递推下去，直到求出所需要时刻的解为止.

(2) 用 $z-$ 变换法求解. 先计算 $(sI-G)^{-1}$, 因为

$$|\ zI-G\ |=\begin{vmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{vmatrix}=(z+0.2)(z+0.8)$$

所以

$$\begin{aligned}
(zI-G)^{-1} &= \frac{adj(zI-G)}{|\ sI-G\ |}=\frac{1}{(z+0.2)(z+0.8)}\begin{pmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \dfrac{4}{z+0.2}-\dfrac{1}{z+0.8} & \dfrac{5}{z+0.2}-\dfrac{5}{z+0.8} \\ \dfrac{-0.8}{z+0.2}+\dfrac{0.8}{z+0.8} & \dfrac{-1}{z+0.2}-\dfrac{4}{z+0.8} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

则由 (3.4) 和 (3.7) 式可知

$$\begin{aligned}
\Phi(k) &= G^k=\mathbf{Z}^{-1}[(zI-G)^{-1}z] \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4(-0.2)^k-(-0.8)^k & 5(-0.2)^k-5(-0.8)^k \\ -0.8(-0.2)^k+0.8(-0.8)^k & -(-0.2)^k+4(-0.8)^k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

又已知 $u(k)=1,\ U(z)=\dfrac{z}{z-1}$, 因此

$$\begin{aligned}
X(z) &= (zI-G)^{-1}[zx(0)+HU(z)]=\begin{pmatrix} \dfrac{(z^2+2)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)} \\ \dfrac{(-z^2+1.84z)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} \dfrac{-51z}{z+0.2}+\dfrac{44}{z+0.8}+\dfrac{25}{z-1} \\ \dfrac{10.2z}{z+0.2}+\dfrac{-35.2}{z+0.8}+\dfrac{7}{z-1} \end{pmatrix} \\
x(k) &= \mathbf{Z}^{-1}[X(z)]=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} -51(-0.2)^k+44(-0.8)^k+25 \\ 10.2(-0.2)^k-35.2(-0.8)^k+7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

令 $k=0,1,2,3$ 分别代入上式可得

$$x(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x(1)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1.84 \end{pmatrix},\ x(2)=\begin{pmatrix} 2.84 \\ -0.84 \end{pmatrix} x(3)=\begin{pmatrix} 0.16 \\ 1.386 \end{pmatrix}.$$

从这个例子可以看出，用迭代法和 $z-$ 变换法求解的结果是一致的，然而 $z-$ 变换法则得到了解得一个表达式.

□

3. **离散系统的状态转移矩阵**

离散系统状态转移矩阵 $\Phi(k)$ 的求取与连续系统转移矩阵 $\Phi(k)$ 极为相似，主要有如下 4 种方法.

(1) **直接法**

根据离散系统递推迭代法中的定义 $\Phi(k)=G^k$ 来计算. 该方法比较简单易于计算机求解，但是不易得到 $\Phi(k)$ 的解析表达式.

(2) $z-$ **变换法**

根据 $z-$ 变换法求取离散系统状态方程解中的对应关系，状态转移矩阵为

$$\Phi(k)=\mathbf{Z}^{-1}[(zI-G)^{-1}z].$$

(3) **化系统矩阵 G 为标准形法**

(a) 离散系统矩阵 G 的特征根均为单根

当离散系统矩阵 G 具有两两互异的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 时，经过线性变换可将其化为对角线标准形，即

$$G=Pdiag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P^{-1}.$$

则离散系统的状态转移矩阵 $\Phi(k)$ 为

$$\Phi(k)=G^k=Pdiag(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)P^{-1} \tag{3.9}$$

这里的矩阵 P 为化系统矩阵 G 为对角线标准形的变换矩阵.

例 2.3.3 齐次离散系统的状态方程为 $x(k+1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{pmatrix}x(k)$, 试求其状态转移矩阵.

解：由系统矩阵 $G=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{pmatrix}$ 的特征方程

$$|\lambda I-G|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 0.16 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+0.2)(\lambda+0.8)=0$$

可知，其特征值为 $\lambda_1=-0.2,\ \lambda_2=-0.8$.

经计算化系统矩阵 G 为对角线标准形的变换矩阵 P 为

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -0.2 & -0.8\end{pmatrix},\ P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 5\\ -1 & -5\end{pmatrix}$$

所以由 (3.9) 式可知系统的状态转移矩阵为

$$\begin{aligned}\Phi(k) &= G^k = P\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0\\ 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}P^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ -0.2 & -0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-0.2)^k & 0\\ 0 & (-0.8)^k\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 5\\ -1 & -5\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4(-0.2)^k-(0.8)^k & 5(-0.2)^k-5(-0.8)^k\\ -0.8(-0.2)^k+0.8(-0.8)^k & -(-0.2)^k+4(-0.8)^k\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

(b) 当系统矩阵 G 的重特征值时，系统转移矩阵为

$$\Phi(k) = G^k = PJ^kP^{-1},$$

其中， J 为约当标准形， P 为化系统矩阵 G 为约当标准形的变换矩阵.

(4) **化为 G 的有限项法**

应用凯莱 - 哈密尔顿定理，系统矩阵 G 满足其自身的零化多项式. 离散系统状态转移矩阵可化为 G 的有限项，即

$$\Phi(k) = a_0(k)I + a_1(k)G + a_2(k)G^2 + \cdots + a_{n-1}(k)G^{n-1}$$

这里的 $a_i(k), i = 0, 1, \cdots, n-1$ 为待定系数，可仿照连续系统的方法来处理.

例 2.3.4 线性定常离散系统的状态方程为

$$x(k+1) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}x(k)$$

试求系统的状态转移矩阵 $\Phi(k)$.

解：由离散系统特征方程 $\mid \lambda I - G \mid = \begin{pmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{pmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0$ 可知其特征值为 $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$. 待定系数可按下式来求取.

$$\begin{cases}(\lambda_1)^k = a_0(k) + a_1(k)\lambda_1\\ (\lambda_2)^k = a_0(k) + a_1(k)\lambda_2\end{cases}$$

将 $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$ 代入上式可得

$$\begin{cases}(-1)^k = a_0(k) - a_1(k)\\ (-2)^k = a_0(k) - 2a_1(k)\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} a_0(k) &=& 2(-1)^k-(-2)^k \\ a_1(k) &=& (-1)^k-(-2)^k \end{cases}$$

则离散系统的状态转移矩阵为

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= a_0(k)I+a_1(k)G=a_0(k)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+a_1(k)\begin{pmatrix}0&1\\-2&-3\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2(-1)^k-(-2)^k & (-1)^k-(-2)^k \\ -2(-1)^k+2(-2)^k & -(-1)^k+2(-2)^k\end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

(c) **离散系统的状态转移矩阵的计算方法**：与连续系统的状态转移矩阵的计算方法类似.

(1) 直接法： $\Phi(k)=G^k$.

(2)$z-$ 变换法： $\Phi(k)=Z^{-1}[(zI-G)^{-1}z]$.

(3) 化系统矩阵 G 为标准形法.

(4) 化为 G 的有限项法.

(5)P_{132}, 例 2-28, 例 2-29.