# 第三章　系统的能控性与能观测性

## §3.1　线性系统的能控性和能观测性

能控性和能观测性是线性系统的两个结构特性，揭示了系统内部的状态变量与系统输入输出之间的关系．能控性和能观测性作为线性系统理论中的两个基本概念是由 R.E.Kalman 在二十世纪六十年代初首先提出来的，这两个基本概念对于控制理论和估计理论的研究和发展具有极其重要的意义．

### § 3.1.1　线性系统的能控性和能观测性定义

我们首先以物理的直观性来讨论能控性和能观测性的基本含意，这种直观的讨论对于理解能控性和能观测性的严格定义的确切含义是很有帮助的．

在系统的状态空间描述中，输入和输出构成系统的外部变量，而状态为系统的内部变量．因此，所谓系统的能控性和能观测性，就是研究系统这个“黑箱”内部的状态是否可由输入影响和是否可由输出反映．如果黑箱内的每一个状态变量的运动在有限时间内都可由输入来影响和控制而由任意的始点到达原点，那么就称该系统是能控的，或者更确切地说是状态能控的，否则，就称系统是不完全能控的．对应地，如果黑箱内所有状态变量的任意形式的运动均可由输出完全反映，则称系统是状态能观测的，简称为能观测的，反之，就称系统是不完全能观测的．

**例** 3.1.1 给定系统的状态空间描述为

$$\left\{\begin{array}{ccl} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

即

$$\left\{\begin{array}{ccl} \dot{x}_1(t) & = & 3x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & -4x_2(t) + 2u(t) \\ y(t) & = & -3x_2(t) \end{array}\right.$$

由此可见，状态变量 $x_1(t), x_2(t)$ 都可通过选择输入 $u(t)$ 而由始点达到原点，因而系统为完全能控的. 但输出 $y(t)$ 只能反映状态变量 $x_2(t)$, 与状态变量 $x_1(t)$ 和输出 $y(t)$ 既无直接也无间接关系，所以系统是不完全能观测的.

由于上述对能控性和能观测性所作的直观说明只是对这两个概念的直观而不严谨的描述，而且也只能用来解释和判断非常直观和非常简单的系统的能控性和能观测性，为了揭示能控性和能观测性的本质属性，并用于分析和判断复杂的系统的能控性和能观测性，需要对这两个概念建立严格的定义，并在此基础上导出相应的判别准则和基本性质.

考虑线性时变系统的状态方程 $\Sigma$:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in J \tag{3.1.1}$$

其中， $x(t) \in R^n, u(t) \in R^p$, $A(t)$ 和 $B(t)$ 分别为 $n \times n$ 和 $n \times p$ 连续函数矩阵. 首先，我们引入系统的能控性定义.

**定义** 3.1.1 对于由 (3.1.1) 确定的线性时变系统 $\Sigma$ ，如果对于给定初始时刻 $t_0 \in J$ 的一个非零初始状态 $x_0$, 存在一个时刻 $t_1 \in J, t_1 > t_0$ ，和一个无约束的容许控制 $u(t), t \in [t_0, t_1]$, 使状态由 $x_0$ 转移到 $t_1$ 时 $x(t_1) = 0$ ，则称此 $x_0$ 是在 $t_0$ 时刻为能控的.

**定义** 3.1.2 对于由 (3.1.1) 确定的线性时变系统 $\Sigma$ ,如果状态空间中的所有非零状态都是在 $t_0(t_0 \in J)$ 时刻为能控的，则称系统 $\Sigma$ 在时刻 $t_0$ 是完全能控的。

**定义** 3.1.3 对于由 (3.1.1) 确定的线性时变系统 $\Sigma$ , 以及给定的初始时刻 $t_0 \in J$ , 如果状态空间中存在一个或一些非零状态在时刻 $t_0$ 是不能控的，则称系统 $\Sigma$ 在时刻 $t_0$ 是不完全能控的.

**注记** 3.1.1 定义中只要求在可找到的输入 $u(t)$ 的作用下，使 $t_0$ 时刻的非零状态 $x_0$ 在 $J$ 上的一段有限时间内转移到状态空间的坐标系原点. 而对于状态转移的轨道并不加以限制和规定，这就是说，能控性是表征系统状态运动的一个定性特征.

**注记** 3.1.2 定义中的无约束容许控制指的是：无约束表示对输入的每个分量的幅值不加以限制，即可取为任意大到所要求的值. 容许控制则表示输入的所有分量均是在 $J$ 上平方可积的.

**注记** 3.1.3 定义中都规定为由非零状态转移到零状态. 如果将其变为由零状态达到非零状态，则称这种情况为状态能达的. 对于连续的线性定常系统，能控性和能达性是等价的. 对于离散系统和时变系统，两者是不等价的. 有例子说明，系统是不完全能控的，但却是完全能达的.

**例** 3.1.2 由于能观测性反映了系统的状态与输出之间的关系，我们同时考虑系统的状态方程和输出方程

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in J \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t),\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.1.2}$$

其中， $A(t), B(t), C(t)$ 和 $D(t)$ 分别为 $n\times n, n\times p, q\times n$ 和 $q\times p$ 的满足状态方程解的存在唯一性条件的时变矩阵，并且状态方程的解可表示为：

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

其中， $\Phi(t,\tau)$ 为系统的状态转移矩阵，系统的输出响应为：

$$y(t)=C(t)\Phi(t,t_0)x_0+C(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau+D(t)u(t)$$

在研究系统的能观测性时，输出 $y(t)$ 和输入 $u(t)$ 都是已知的，只有内部变量即初始状态 $x_0$ 是未知的．因此．若定义

$$\bar{y}(t)=y(t)-[C(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau+D(t)u(t)]$$

则有

$$\bar{y}(t)=C(t)\Phi(t,t_0)x_0$$

这表明，能观测性就是研究 $x_0$ 可由 $\bar{y}(t)$ 的完全估计性，所以这又等价于研究 $u(t)=0$ 时，由 $y(t)$ 来估计 $x_0$ 的可能性，即系统的零输入方程

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{x}(t) & = & A(t)x(t), \quad x(t_0)=x_0,\ t_0,t\in J\\ y(t) & = & C(t)x(t)\end{cases} \tag{3.1.3}$$

的能观测性，下面对于 (3.1.3) 确定的系统给出能观测性的有关定义.

**定义** 3.1.4 对于由 (3.1.3) 确定的线性时变系统 $\Sigma$, 如果对取定初始时刻 $t_0\in J$ 的一个非零初始状态 $x_0$ , 存在一个有限时刻 $t_1\in J, t_1>t_0$, 使对所有 $t\in[t_0,t_1]$, 有 $y(t)=0$, 则称此 $x_0$ 在时刻 $t_0$ 是不能观测的.

**定义** 3.1.5 对于由 (3.1.3) 确定的线性时变系统 $\Sigma$, 如果状态空间中的所有非零状态都不是时刻 $t_0(t_0\in J)$ 的不能观测状态，则称系统 $\Sigma$ 在时刻 $t_0$ 是完全能观测的.

**定义** 3.1.6 对于由 (3.1.3) 确定的线性时变系统 $\Sigma$, 取定初始时刻 $t_0\in J$ , 如果状态空间中存在一个或一些非零状态在时刻 $t_0$ 是不能观测的，则称系统 $\Sigma$ 在时刻 $t_0$ 是不完全能观测的.

§ 3.1.2 **线性系统的能控性判据**

下面，我们将利用系统的系数矩阵给出系统能控性的一些判别准则.

1. **线性定常系统的能控性判据**

首先，考虑线性定常系统的能控性判据．对于线性定常系统的状态方程：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\ x(0)=x_0,\ t\geq 0 \tag{3.1.4}$$

我们将给出直接利用系数矩阵 $A, B$ 判别系统能控性的一些常用方法.

**定理** 3.1.1(Gram 矩阵判据) 线性定常系统 (3.1.4) 为完全能控的充分必要条件是: 存在时刻 $t_1 > 0$, 使如下定义的 Gram 矩阵

$$W_c[0, t_1] = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau} d\tau$$

为非奇异的.

**证明**: 充分性. 若存在时刻 $t_1 > 0$, 使得 $W_c[0, t_1]$ 非奇异, 则 $W_c^{-1}[0, t_1]$ 存在, 对任一非零初始状态 $x_0$, 构造控制 $u(t)$ 为

$$u(t) = -B^T e^{-A^T t} W_c^{-1}[0, t_1] x_0, \ \ t \in [0, t_1]$$

则在此 $u(t)$ 作用下, 系统的状态 $x(t)$ 在 $t_1$ 时刻为

$$\begin{aligned}
x(t_1) &= e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau \\
&= e^{At_1} x_0 - e^{At_1} \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau} W_c^{-1}[0, t_1] x_0 d\tau \\
&= e^{At_1} [x_0 - (\int_0^{t_1} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau} d\tau) W_c^{-1}[0, t_1] x_0] \\
&= e^{At_1} (x_0 - W_c[0, t_1] W_c^{-1}[0, t_1] x_0) \\
&= e^{At_1} (x_0 - x_0) = 0
\end{aligned}$$

这表明: 对任意 $x_0 \neq 0$ , 存在有限时刻 $t_1 > 0$ 和控制 $u(t)$, 使状态由 $x_0$ 转移到 $t_1$ 时刻 $x(t_1) = 0$, 故系统为完全能控的.

必要性. 用反证法, 若 $W_c[0, t_1]$ 为奇异的, 那么存在某个非零的 $\alpha_0 \in R^n$, 使得:

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_0^T W_c[0, t_1] \alpha_0 = \int_0^{t_1} \alpha_0^T e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau} \alpha_0 d\tau \\
&= \int_0^{t_1} [B^T e^{-A^T\tau} \alpha_0]^T [B^T e^{-A^T\tau} \alpha_0] d\tau \\
&= \int_0^{t_1} \|B^T e^{-A^T\tau} \alpha_0\|^2 d\tau
\end{aligned}$$

其中 $\|\cdot\|$ 为范数, 即

$$B^T e^{-A^T\tau} \alpha_0 = 0, \ \forall t \in [0, t_1]. \tag{3.1.5}$$

另一方面, 因系统为完全能控的, 对于以 $\alpha_0$ 为初始状态的系统的状态 $x(t_0)$, 存在时刻 $t_2 > 0$, $t_2 < t_1$, (否则可以把 $t_1$ 在开始时取大一些) 使得:

$$0 = x(t_2) = e^{At_2} \alpha_0 + \int_0^{t_2} e^{A(t_2-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

即 $\alpha_0 = -\int_0^{t_2} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$, 从而由 (3.1.5) 可知

$$\|\alpha_0\|^2 = \alpha_0^T\alpha_0 = [-\int_0^{t_2} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau]^T\alpha_0 = -\int_0^{t_2} u^T(\tau)B^Te^{-A^T\tau}\alpha_0 d\tau = 0$$

故 $\alpha_0 = 0$, 这与假设 $\alpha_0 \neq 0$ 矛盾.

□

从定理 3.1.1 可知，要应用 Gram 矩阵判据必须先计算矩阵指数函数 $e^{At}$, 这在矩阵 $A$ 的维数比较大时是很困难的，所以矩阵判据多数情况用于理论分析.

**定理** 3.1.2(秩判据) 线性定常系统 (3.1.4) 为完全能控的充分必要条件是:

$$rank\begin{pmatrix}B & \vdots & AB & \vdots & \cdots & \vdots & A^{n-1}B\end{pmatrix} = n$$

其中 $n$ 为矩阵 $A$ 的维数， $Q_c = \begin{pmatrix}B & \vdots & AB & \vdots & \cdots & \vdots & A^{n-1}B\end{pmatrix}$ 称为系统的能控性判别阵.

**证明**：充分性. 采用反证法，若系统为不完全能控的，则由 Gram 矩阵判据可知：

$$W_c[0,t_1] = \int_0^{t_1} e^{-At}BB^Te^{-A^Tt}dt,\ \forall t_1 > 0$$

为奇异阵，即存在非零向量 $\alpha$, 使得：

$$0 = \alpha^TW_c[0,t_1]\alpha = \int_0^{t_1} \alpha^Te^{-At}BB^Te^{-A^Tt}\alpha dt = \int_0^{t_1} \|\alpha^Te^{-At}B\|^2dt$$

即

$$\alpha^Te^{-At}B = 0,\ \forall t \in [0,t_1].$$

对上式关于 $t$ 求直到 $(n-1)$ 阶导数，再令 $t = 0$ 可得

$$\alpha^TB = 0, \alpha^TAB = 0, \alpha^TA^2B = 0, \cdots, \alpha^TA^{n-1}B = 0$$

从而

$$\alpha^T\begin{pmatrix}B & \vdots & AB & \vdots & \cdots & \vdots & A^{n-1}B\end{pmatrix} = \alpha^TQ_c = 0$$

由于 $\alpha \neq 0$, 上式表明 $Q_c$ 为行线性相关，所以 $rankQ_c < n$, 这与题设条件 $rankQ_c = n$ 矛盾.

必要性. 采用反证法，假设 $rankQ_c < n$, 那么 $Q_c$ 为行线性相关，因此必存在一个非零 $n$ 维向量 $\alpha$ 使得

$$\alpha^TQ_c = \alpha^T\begin{pmatrix}B & \vdots & AB & \vdots & \cdots & \vdots & A^{n-1}B\end{pmatrix} = 0$$

即

$$\alpha^TA^iB = 0,\ \ i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

再由 Cayley-Hamilton 定理可知： $A^n, A^{n+1}, \cdots$ , 均可表为 $I, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$ 的线性组合，由此可得： $\alpha^T A^i B = 0, i = 0, 1, 2, \cdots$ , 从而 $\forall t \in [0, t_1]$ 有：

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^T IB - \alpha^T AtB + \frac{1}{2!}\alpha^T A^2 t^2 B + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\alpha^T A^n t^n B + \cdots \\ &= \alpha^T [I - At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}A^n t^n + \cdots]B \\ &= \alpha^T e^{-At} B. \end{aligned}$$

这样

$$0 = \int_0^{t_1} \alpha^T e^{-At} BB^T e^{-A^T t} \alpha dt = \alpha^T (\int_0^{t_1} e^{-At} BB^T e^{-A^T t} dt)\alpha = \alpha^T W_c[0, t_1]\alpha$$

这表明 Gram 矩阵 $W[0, t_1]$ 为奇异的，从而系统为不完全能控的，矛盾.

□

**例** 3.1.2 试判断单输入线性定常系统 $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$ 的状态能控性.

解：由于

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_1 \end{pmatrix}, \quad A^2 B = \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1 \\ -a_2 + a_1^2 \end{pmatrix}$$

所以

$$rankQ_c = rank \begin{pmatrix} B & AB & A^2 B \end{pmatrix} = rank \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 1 & -a_1 & -a_2 + a_1^2 \end{pmatrix} = 3 = n$$

因此，由定理 3.1.2 可知该系统是完全能控的.

□

**例** 3.1.3 判断如下多输入线性定常系统的能控性

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

解：由于系统的能控性判别矩阵为

$$Q_c = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

所以 $rankQ_c = 2 \neq 3$, 因此该系统是不能控的.

顺便指出，在计算行数比列数少的矩阵的秩时，有时可以使用下列关系式，即

$$rankQ_c = rank(Q_c Q_c^T)$$

上式右端是一个 $n \times n$ 方阵，计算方阵的秩有时会简单一些．在本例中

$$Q_c Q_c^T = \begin{pmatrix} 59 & 49 & -49 \\ 49 & 42 & -42 \\ -49 & -42 & 42 \end{pmatrix}$$

它的秩显然是 2, 结论完全相同.

□

下面给出由 Popov,Belevitch 和 Hautus 的姓氏命名的 PBH 秩判据.

**定理** 3.1.3(PBH 秩判据) 线性定常系统 (3.1.4) 为完全能控的充分必要条件是：对矩阵 $A$ 的所有特征值 $\lambda_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$ 均成立：

$$rank\,(\lambda_i I - A, B) = n,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

或等价地， $rank\,(sI - A, B) = n, \forall s \in \mathcal{C}$.

**证明**：反证法．事实上，若对某个 $\lambda_i$ 有 $rank\,(\lambda_i I - A, B) < n$, 则 $(\lambda_i I - A, B)$ 为行线性相关．因此，必存在一个非零常向量 $\alpha$ 使得： $\alpha^T\,(\lambda_i I - A, B) = 0$, 故

$$\alpha^T A = \lambda_i \alpha^T, \alpha^T B = 0,$$

进而

$$\alpha^T B = 0,\ \alpha^T AB = \lambda_i \alpha^T B = 0,\ \alpha^T A^2 B = \lambda_i \alpha^T AB = 0,\ \cdots,\ \alpha^T A^{n-1} B = 0.$$

于是

$$\alpha^T \begin{pmatrix} B & \vdots & AB & \vdots & \cdots & \vdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = \alpha^T Q_c = 0$$

但是 $\alpha \neq 0$, 所以 $rankQ_c < n$, 这表明系统是不完全能控的，矛盾．必要性得证.

由于上述结论反之亦然，充分性成立．再注意到 $(sI-A,B)$ 为多项式矩阵，且对应数域 $\mathcal{C}$ 上除 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 以外的所有 $s$ 都有 $\det(sI-A)\neq 0$, 故等价性成立.

□

**例** 3.1.4 试判断如下系统的状态能控性.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

**解**：由方程 $\mid \lambda I - A \mid = 0$ 可解得矩阵 $A$ 的特征值分别为 $1,2$ 和 3. 对特征值 $\lambda_1 = 1$, 有

$$rank(\lambda_1 I - A, B) = rank \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 3 = n$$

对特征值 $\lambda_2 = 2$, 有

$$rank(\lambda_2 I - A, B) = rank \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 3 = n$$

对特征值 $\lambda_3 = 2$, 有

$$rank(\lambda_3 I - A, B) = rank \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 < n$$

由定理 3.1.3 可知该系统是不完全能控的，且是特征值 3 对应的子空间不能控.

□

**定理** 3.1.4(PBH 特征向量判据) 线性定常系统 (3.1.4) 为完全能控的充分必要条件是：$A$ 不能有与 $B$ 的所有列相正交的非零左特征向量, 即对 $A$ 的任一特征值 $\lambda_i$ , 使同时满足 $\alpha^T A = \lambda_i \alpha^T, \alpha^T B = 0$ 的特征向量 $\alpha$ 必为零.

**证明**：必要性．若存在一个向量 $\alpha$ ，使得 $\alpha^T A = \lambda_i \alpha^T, \alpha^T B = 0$ 则有

$$\alpha^T B = 0, \alpha^T AB = \lambda_i \alpha^T B = 0, \cdots, \alpha^T A^{n-1} B = 0$$

于是

$$\alpha^T\left(B \;\vdots\; AB \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; A^{n-1}B\right) = \alpha^T Q_c = 0$$

因为系统是完全能控的， $rankQ_c = n$, 所以必有 $\alpha = 0$

充分性. 反证法, 若系统不完全能控, 即存在 $\alpha_0 \neq 0$. 由定理 3.1.3 存在 $\lambda_i$, 使得 $rank\left(\lambda_i I - A, B\right) < n$, $\alpha_0^T\left(\lambda_i I - A, B\right) = 0$, 即 $\alpha_0^T A = \lambda_i \alpha_0^T, \alpha_0^T B = 0$, 矛盾.

□

**定理** 3.1.5(若当规范形判据) 线性定常系统 (3.1.4) 为完全能控的充分必要条件是

(1) 当矩阵 $A$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为两两相异时，由 (3.1.4) 导出的系统的对角线规范形为：

$$\dot{\bar{x}} = D\bar{x} + \dot{B}u, \;\; D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

其中 $\dot{B}$ 不包含元素全为零的行.

(2) 当矩阵 $A$ 的特征值为 $\lambda_1(\sigma_1$ 重$)$,$\lambda_2(\sigma_2$ 重$)$, $\cdots$,$\lambda_l(\sigma_l$ 重$)$, 且 $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_l = n$ 时，由 (3.4) 导出的系统的若当规范形为

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

其中

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_l \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \vdots \\ \hat{B}_l \end{pmatrix}_{n\times p}$$

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{i1} & & & \\ & J_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i\alpha_i} \end{pmatrix}_{\sigma_i\times\sigma_i} \qquad \hat{B}_i = \begin{pmatrix} \hat{B}_{i1} \\ \hat{B}_{i2} \\ \vdots \\ \hat{B}_{i\alpha_i} \end{pmatrix}_{\sigma_i\times p}$$

$$J_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_{ik}\times r_{ik}} \qquad \hat{B}_{ik} = \begin{pmatrix} \hat{b}_{1_{i_k}} \\ \hat{b}_{2_{i_k}} \\ \\ \hat{b}_{r_{i_k}} \end{pmatrix}_{r_{ik}\times p}$$

而 $(r_{i_1}+r_{i_2}+\cdots+r_{i_{\alpha_i}})=\sigma_i$. 由 $\hat{B}_{i_k}(k=1,2,\cdots,\alpha_i)$ 的最后一行所组成的矩阵 $\begin{pmatrix}\hat{b}_{r_{i_1}}\\ \hat{b}_{r_{i_2}}\\ \vdots \\ \hat{b}_{r_{i_{\alpha_i}}}\end{pmatrix}$ 对 $i=1,2,\cdots,l$ 均为行线性无关.

**证明:** (1) 可由秩判据证明； (2) 可由 PHB 秩判据证明 (作业).

□

下面我们给出约当规范形判据的几点注记.

**注记** 3.1.4 若系统矩阵 $A$ 为每个特征值都只有一个约当块的约当矩阵，则系统能控的充分必要条件为对应 $A$ 的每个约当块的 $B$ 的分块的最后一行都不全为零.

**注记** 3.1.5 若 $A$ 为某个特征值有多于一个约当块的约当矩阵，则系统能控的充分必要条件为对应于 $A$ 的每个特征值的所有约当块的 $B$ 的分块的最后一行线性无关.

**注记** 3.1.6 若单输入线性定常系统的约当规范形的系统矩阵为某个特征值有多于一个约当块的约当矩阵，则该系统不完全能控.

**例** 3.1.5 试判断如下系统的状态能控性.

$$(1)\ \dot{x}(t)=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}u(t),\qquad (2)\ \dot{x}(t)=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}u(t),$$

$$(3)\ \dot{x}(t)=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}u(t),\quad (4)\ \dot{x}(t)=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}u(t).$$

**解:** (1) 由于 $A$ 为特征值互异的对角线矩阵 (约当矩阵的特例), 且 $B$ 中各行不全为零，故系统状态完全能控.

(2) 由于 $A$ 为每个特征值都只有一个约当块，但对应于特征值 $-4$ 的约当块的 $B$ 的分块的最后一行全为零，故该系统的状态 $x_1$ 和 $x_2$ 不完全能控，则系统不完全能控.

(3) 由于 $A$ 中特征值 $-4$ 的两个约当块所对应的 $B$ 的分块的最后一行线性无关，且 $A$ 中特征值 $-3$ 的约当块所对应的 $B$ 的分块的最后一行不全为零，故系统状态完全能控.

(4) 由于 $A$ 中特征值 $-4$ 具有两个约当块，并且为单输入系统，所以由注记 3.1.6 可知该系统是不完全能控的.

$\square$

2. **能控性指数**

下面我们引入一个重要的概念 - 能控性指数. 对于完全能控的线性定常系统 (3.1.4), 矩阵 $A, B$ 分别为 $n \times n$ 和 $n \times p$ 的常值矩阵. 定义

$$Q_k = \begin{pmatrix} B & \vdots & AB & \vdots & A^2B & \vdots & \cdots & \vdots & A^{k-1}B \end{pmatrix}$$

则 $Q_k$ 为 $n \times kp$ 常值矩阵, $k$ 为正整数. 由于系统是能控的, 当 $k = n$ 时, $Q_n = Q_c$ 为能控性判别矩阵, 且 $rankQ_n = n$. 现考察 $k$ 由 1 增加到 $n$ 使得 $rankQ_k = n$ 成立的 $k$ 的最小正整数 $\mu$ 称为系统的能控性指数.

下面, 我们给出能控性指数 $\mu$ 的一个关系式.

**定理** 3.1.6 令 $rankB = r \leq p$ 则必成立

$$\frac{n}{p} \leq \mu \leq n - r + 1. \tag{3.1.6}$$

进一步, 若令 $\bar{n}$ 为矩阵 $A$ 的最小多项式的次数, 那么,

$$\frac{n}{p} \leq \mu \leq \min(\bar{n}, n - r + 1).$$

**证明**: 考虑到 $Q_\mu$ 为 $n \times \mu p$ 阵, 所以 $Q_\mu$ 的秩为 $n$, 则必须 $Q_\mu$ 的列数大于或等于它的行数, 即 $\mu p \geq n$ , 故 (3.1.6) 的左不等式成立. 再由 $rankB = r$ 及能控性指数定义可知 $AB, A^2B, \cdots, A^{\mu-1}B$ 的每一个矩阵至少有一个列向量和 $Q_\mu$ 中其左侧所有线性独立的列向量线性无关, 因此成立 $r + \mu - 1 \leq n$, 即 $\mu \leq n - r + 1$.

$\square$

由 (3.1.6) 式可以对能控性指数给出以下注记.

**注记** 3.1.7 对于单输入系统, 此时 $p = 1$, 由 (3.1.6) 式可知系统的能控性指数为 $\mu = n$.

**注记** 3.1.8 对于线性定常系统 (3.1.4) , 可导出简化的能控性秩判据, 即系统完全能控的充分必要条件是:

$$rankQ_{n-r+1} = rank \begin{pmatrix} B & \vdots & AB & \vdots & \cdots & \vdots & A^{n-r}B \end{pmatrix} = n.$$

注意到矩阵 $B$ 的秩易于计算, 故利用上式来判断系统的能控性可以使计算得到简化.

**注记** 3.1.9 若记

$$Q_k = \begin{pmatrix} b_1, b_2, \cdots, b_p & \vdots & Ab_1, Ab_2, \cdots, Ab_p & \vdots & \cdots & \vdots & A^{\mu-1}b_1, A^{\mu-1}b_2, \cdots, A^{\mu-1}b_p \end{pmatrix}$$

且依次从左到右搜索 $Q_k$ 中的 $n$ 个线性无关的列. 由于 $rankB = r$, 故可将这 $n$ 个线性无关的列重新排列为

$$b_1, Ab_1, \cdots, A^{\mu_1 - 1}b_1; b_2, Ab_2, \cdots, A^{\mu_2 - 1}b_2; \cdots; b_r, Ab_r, \cdots, A^{\mu_r - 1}b_r$$

那么 $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r=n$, 称 $\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r\}$ 为系统 $(A,B)$ 的能控性指数集，记

$$\mu=max\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r\}$$

即为系统的能控性指数. 可以证明：系统的能控性指数和能控性指数集在系统的线性非奇异变换下保持不变.

3. **线性时变系统能控性判据**

下面，我们来讨论线性时变系统的能控性判据. 设线性时变系统的状态方程为

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\ x(t_0)=x_0,\ \ t,t_0\in J, \tag{3.1.7}$$

其中， $x$ 为 $n$ 维状态向量， $u$ 为 $p$ 维输入向量， $J$ 为时间定义区间， $A(t)$ 和 $B(t)$ 分别为 $n\times n$ 和 $n\times p$ 的时变矩阵，并且满足解的存在唯一性条件.

**定理** 3.1.7(Gram 矩阵判据) 线性时变系统 (3.1.7) 在时刻 $t_0$ 为完全能控的充分必要条件是：存在一个有限时刻 $t_1\in J, t_1>t_0$, 使得如下定义的 Gram 矩阵

$$W_c[t_0,t_1]=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_0,t)dt$$

为非奇异的，其中 $\Phi(\cdot,\cdot)$ 为线性时变系统 (3.1.7) 的状态转移矩阵.

**证明**: (作业)

□

尽管 Gram 矩阵判据的形式简单，但是计算时变系统的状态转移矩阵却十分困难，因此这里的 Gram 矩阵判据也多用于理论分析.

**定理** 3.1.8(秩判据) 设 $A(t)$ 和 $B(t)$ 是 $(n-1)$ 阶连续可微的，则线性时变系统 (3.1.7) 在时刻 $t_0$ 为完全能控的一个充分条件是：存在一个有限时刻 $t_1\in J, t_1>t_0$ , 使得

$$rank\Big(M_0(t_1)\ \vdots\ M_1(t_1)\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ M_{n-1}(t_1)\Big)=n$$

其中

$$\begin{cases} M_0(t) & = & B(t) \\ M_1(t) & = & -A(t)M_0(t)+\dfrac{d}{dt}M_0(t) \\ \\ M_2(t) & = & -A(t)M_1(t)+\dfrac{d}{dt}M_1(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{n-1}(t) & = & -A(t)M_{n-2}(t)+\dfrac{d}{dt}M_{n-2}(t) \end{cases}$$

**证明**：第一步，考虑到 $\Phi(t_0,t_1)B(t_1)=\Phi(t_0,t_1)M_0(t_1)$, 且定义

$$\frac{\partial}{\partial t_1}[\Phi(t_0,t_1)B(t_1)]=[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t_0,t)B(t)]_{t=t_1}$$

再注意到 $\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(t,t_0)=I$ 两边关于 $t$ 求导可得

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt}[\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(t,t_0)]=\frac{d}{dt}[\Phi(t,t_0)]\Phi^{-1}(t,t_0)+\Phi(t,t_0)\,\frac{d}{dt}[\Phi^{-1}(t,t_0)]\\ &= A(t)\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(t,t_0)+\Phi(t,t_0)\dot{\Phi}(t_0,t)=A(t)+\Phi(t,t_0)\dot{\Phi}(t_0,t)\end{aligned}$$

所以

$$\dot{\Phi}(t_0,t)=-\Phi(t_0,t)A(t),\ \ \Phi(t_0,t_0)=I$$

于是

$$\begin{aligned}&\left(\Phi(t_0,t_1)B(t_1)\ \vdots\ \frac{\partial}{\partial t_1}\Phi(t_0,t_1)B(t_1)\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ \frac{\partial^{n-1}}{\partial t_1^{n-1}}\Phi(t_0,t_1)B(t_1)\right)\\ =\ &\Phi(t_0,t_1)\left(M_0(t_1)\ \vdots\ M_1(t_1)\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ M_{n-1}(t_1)\right)\end{aligned}$$

由于 $\Phi(t_0,t_1)$ 为非奇异阵，故有

$$rank\left(\Phi(t_0,t_1)B(t_1)\ \vdots\ \frac{\partial}{\partial t_1}\Phi(t_0,t_1)B(t_1)\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ \frac{\partial^{n-1}}{\partial t_1^{n-1}}\Phi(t_0,t_1)B(t_1)\right)=n. \tag{3.1.8}$$

第二步, 现证明对 $t_1>t_0$ ，$\Phi(t_0,t)B(t)$ 在 $[t_0,t_1]$ 上行线性无关. 利用反证法, 假设 $\Phi(t_0,t)B(t)$ 行线性相关，那么存在 $1\times n$ 的非零常向量 $\alpha$ 使对所有 $t\in[t_0,t_1]$ 成立

$$\alpha\Phi(t_0,t)B(t)=0.$$

从而，对所有 $t\in[t_0,t_1],k=1,2,\cdots,n-1$ 都有

$$\alpha\frac{\partial^k}{\partial t^k}\Phi(t_0,t)B(t)=0$$

即，对所有 $t\in[t_0,t_1]$ 有：

$$\alpha\left(\Phi(t_0,t)B(t)\ \vdots\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t_0,t)B(t)\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi(t_0,t)B(t)\right)=0$$

这表明

$$\left(\Phi(t_0,t)B(t)\ \vdots\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t_0,t)B(t)\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi(t_0,t)B(t)\right)$$

对所有 $t\in[t_0,t_1]$ 为行线性相关，这与 (3.1.8) 式矛盾.

第三步，由于对所有 $t \in [t_0, t_1], \Phi(t_0, t)B(t)$ 行线性无关，下面证明 Gram 矩阵 $W_c[t_0, t_1]$ 为非奇异的．若不然，设 $W_c[t_0, t_1]$ 奇异，于是存在一个 $1 \times n$ 非零向量 $\alpha$ 使得 $\alpha W_c[t_0, t_1] = 0$, 即

$$0 = \alpha W_c[t_0, t_1]\alpha^T = \int_{t_0}^{t_1} [\alpha\Phi(t_0, t)B(t)][\alpha\Phi(t_0, t)B(t)]^T dt = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha\Phi(t_0, t)B(t)\|^2 dt.$$

于是，对所有 $t \in [t_0, t_1]$ 有 $\alpha\Phi(t_0, t)B(t) = 0$, 而 $\Phi(t_0, t)B(t)$ 是行线性无关的， $\alpha \neq 0$ 矛盾.

第四步，由于 Gram 矩阵 $W_c[t_0, t_1]$ 为非奇异的， $t_1 \in J, t_1 > t_0$ 再由 Gram 矩阵判据可知：系统在 $t_0$ 时刻为完全能控的.

□

**例** 3.1.6 试判断如下系统在 $t_0 = 0$ 的状态能控性.

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad (t > 0)$$

**解**: (1) 采用 Gram 矩阵判据．首先求系统的状态转移矩阵，考虑到统矩阵 $A(t)$ 满足

$$A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1)$$

所以状态转移矩阵 $\Phi(0, t)$ 为

$$\Phi(0, t) = I + \int_t^0 \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\tau + \frac{1}{2!}(\int_t^0 \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\tau)^2 + \cdots = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -t^2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

因此， Gram 矩阵 $W_c[0, t_f]$ 为

$$\begin{aligned} W_c[0, t_f] &= \frac{1}{4}\int_0^{t_f} \begin{pmatrix} 2 & -t^2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -t^2 & 2 \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{t_f} \begin{pmatrix} t^4 & -2t^2 \\ -2t^2 & 4 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 3t_f^5 & -10t_f^3 \\ -10t_f^3 & 60t_f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由于当 $t_f > 0$ 时，

$$det\, W_c[0, t_f] = \frac{1}{20}t_f^6 - \frac{1}{36}t_f^6 = \frac{1}{45}t_f^6 > 0,$$

所以系统在 $t_0 = 0$ 是状态完全能控的.

(2) 由于 $A(t), B(t)$ 高阶连续可导，因此可采用秩判据法．由定理 3.1.8

$$\begin{cases} M_0(t) = B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T \\ M_1(t) = -A(t)M_0(t) + \dot{M}_0(t) = -\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & 0 \end{pmatrix}^T \end{cases}$$

所以在 $t>0$ 时

$$rank(M_0(t),\, M_1(t)) = rank\begin{pmatrix}0 & -t\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 2 = n,$$

因此由秩判据可知，该系统在 $t_0=0$ 是状态完全能控的.

□

**例** 3.1.7 判定下列线性时变系统在 $t_0$ 时刻是完全能控的.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t & 1 & 0\\ 0 & 2t & 0\\ 0 & 0 & t^2+t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}u(t),\ \ J=[0,2], t_0=0.5.$$

**解**：首先计算

$$\begin{cases}M_0(t) &=& B(t) = \begin{pmatrix}0, & 1, & 1\end{pmatrix}^T\\ M_1(t) &=& -A(t)M_0(t)+\dot{M}_0(t) = \begin{pmatrix}-1, & -2t, & -t^2-t\end{pmatrix}^T\\ M_2(t) &=& -A(t)M_1(t)+\dot{M}_1(t) = \begin{pmatrix}3t, & 4t^2-2, & (t^2+t)^2-2t-1\end{pmatrix}^T\end{cases}$$

由于矩阵 $\begin{pmatrix}M_0(t) & \vdots & M_1(t) & \vdots & M_2(t)\end{pmatrix}$ 在 $t=1$ 时的秩为 3 ，所以系统在 $t_0=0.5$ 是完全能控的.

□

§ 3.1.3 **线性系统的能观测性判据**

通常，在讨论能观测性问题时总是考虑输入 $u=0$ 的情况. 下面，分别就线性定常系统和线性时变系统来介绍判别能观测性的一些常用判据.

1. **线性定常系统的能观性判据**

考虑输入 $u=0$ 时系统的状态方程和输出方程

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad x(0)=x_0, t\geq 0\\ y(t) = Cx(t),\end{cases} \tag{3.1.9}$$

其中， $x$ 为 $n$ 维状态向量， $y$ 为 $q$ 维输出向量， $A$ 和 $C$ 分别为 $n\times n$ 和 $q\times n$ 的常值矩阵.

**定理** 3.1.9(Gram 矩阵判据) 线性定常系统 (3.1.9) 为完全能观测的充分必要条件是：存在有限时刻 $t_1>0$, 使得如下定义的 Gram 矩阵

$$W_o[0,t_1] = \int_0^{t_1} e^{A^Tt}C^TCe^{At}dt,$$

为非奇异的.

**证明**：充分性：若存在时刻 $t_1>0$, 使得 $W_o[0,t_1]$ 非奇异，则 $W_o^{-1}[0,t_1]$ 存在. 对 $[0,t_1]$ 上已知的输出 $y(t)$ 有如下关系式

$$\begin{aligned} W_o^{-1}[0,t_1]\int_0^{t_1}e^{A^Tt}C^Ty(t)dt &= W_o^{-1}[0,t_1]\int_0^{t_1}e^{A^Tt}C^TCe^{At}x_0dt \\ &= W_o^{-1}[0,t_1](\int_0^{t_1}e^{A^Tt}C^TCe^{At}dt)x_0 \\ &= W_o^{-1}[0,t_1]W_0[0,t_1]x_0=x_0 \end{aligned}$$

这表明在 $W_o[0,t_1]$ 非奇异的条件下，总可以根据 $[0,t_1]$ 上的输出 $y(t)$ 来构造出对应的非零初始状态 $x_0$. 因此，系统为完全能观测的.

必要性. 采用反证法，若 $W_o[0,t_1]$ 为奇异的，那么存在某个非零向量 $\alpha\in R^n$ ，使得：

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^TW_o[0,t_1]\alpha &= \int_0^{t_1}\alpha^Te^{A^Tt}C^TCe^{At}\alpha dt &= \int_0^{t_1}(Ce^{At}\alpha)^T(Ce^{At}\alpha)dt \\ &= \int_0^{t_1}y^T(t)y(t)dt &= \int_0^{t_1}\|y(t)\|^2dt \end{aligned}$$

因此

$$y(t)=Ce^{At}\alpha\equiv0,\ \forall t\in[t_0,t_1].$$

这表明， $\alpha$ 为状态空间中的不能观测状态，这与系统的完全能观测性相矛盾.

□

由于 Gram 矩阵判据中要用到矩阵指数函数 $e^{At}$, 但当系统的维数较大时计算比较复杂，因此这种判据主要用于理论分析.

**定理** 3.1.10(秩判据) 线性定常系统 (3.1.9) 为完全能观测的充分必要条件是 $rankQ_0=n$, 其中 $Q_0=\left(C,CA,\cdots,CA^{n-1}\right)^T$ 称为系统的能观测性判别矩阵.

□

**例** 3.1.8 判断下列系统的能观测性.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-2&1\\3&0&2\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}x(t) \end{cases}$$

**解**：由已知 $C=\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}$， $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-2&1\\3&0&2\end{pmatrix}$ , 所以

$$CA=\begin{pmatrix}0&-2&1\end{pmatrix},\ CA^2=\begin{pmatrix}3&4&0\end{pmatrix},$$

因此系统的能观测矩阵为

$$Q_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

显然 $rank\, Q_o = 3 = n$, 所以由定理 3.1.10 可知该系统是能观测的.

□

**例** 3.1.9 假设系统状态方程仍如上例所述，而观测方程为

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

试问，系统是否仍是能观测的？

**解**：由于系统的能观测矩阵为

$$Q_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 9 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

显然， $Q_o$ 的秩小于 3, 所以系统是不能观测的.

□

将这两个例子比较一下得到一个有趣的启发：它们状态方程相同，但观测方程不同. 观测数据少系统是能观测的，观测数据多了反而是不能观测的. 这说明，通过观测输出变量来确定系统内部的状态变量时要正确选择观测量. 在这两个例子中，状态变量 $x_2$ 是关键量，若观测量的输出量中包含了关于 $x_2$ 的信息，就能把全部状态变量确定出来. 否则，即使增加系统输出的个数还是得不到 $x_2$ 的信息，系统仍然是不能观测的.

**定理** 3.1.11(PBH 秩判据) 线性定常系统 (3.1.9) 为完全能观测的充分必要条件是：对矩阵 $A$ 的所有特征值 $\lambda_i$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 均成立

$$rank \begin{pmatrix} C \\ \lambda_i I - A \end{pmatrix} = n, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或等价的

$$rank\begin{pmatrix} C \\ sI-A \end{pmatrix}=n,\ \ \forall s\in\mathcal{C}$$

即 $(sI-A)$ 和 C 是互质的.

$\square$

**定理** 3.1.12(PBH 特征向量判据) 线性定常系统 (3.1.9) 为完全能观测的充分必要条件是 $A$ 没有与 $C$ 的所有行相正交的非零右特征向量, 即对 $A$ 的任一特征值 $\lambda_i$ 使同时满足 $A\bar{\alpha}=\lambda_i\bar{\alpha}, C\bar{\alpha}=0$ 的特征向量 $\bar{\alpha}$ 必为零向量.

$\square$

**例** 3.1.10 试判断如下系统的状态能观测性.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} x(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

**解**：由方程 $\mid \lambda I-A \mid=0$ 可解得矩阵 $A$ 的特征值分别为 $-1,-2,$ 和 $-3$. 对特征值 $\lambda_1=-1$, 有

$$rank\begin{pmatrix} \lambda_1 I-A \\ C \end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 11 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}=2<n$$

由定理 3.1.11 可知该系统是不完全能观测的.

$\square$

**定理** 3.1.13(若当规范形判据) 线性定常系统 (3.1.9) 为完全能观测的充分必要条件是：

(1) 当矩阵 $A$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为两两相异时，由 (3.1.9) 导出的对角线规范形为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t)=D\bar{x}(t) \\ y(t)=\bar{C}x(t) \end{cases}$$

其中， $D=diag\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right)$， $\dot{C}$ 不包含元素全为零的列.

(2) 当矩阵 $A$ 的特征值为 $\lambda_1(\sigma_1$ 重$)$,$\lambda_2(\sigma_2$ 重$)$ ， $\cdots$ ， $\lambda_l(\sigma_l$ 重$)$, 且 $\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_l=n$

时，由 (3.1.9) 导出的若当规范形：

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) \\ y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) \end{cases}$$

其中

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_l \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad \hat{C} = \begin{pmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 & \cdots & \hat{C}_l \end{pmatrix}_{q\times n}$$

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{i1} & & & \\ & J_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i\alpha_i} \end{pmatrix}_{\sigma_i\times \alpha_i} \qquad \hat{C}_i = \begin{pmatrix} \hat{C}_{i1} & \hat{C}_{i2} & \cdots & \hat{C}_{i\alpha_i} \end{pmatrix}_{q\times \sigma_i}$$

$$J_{i_k} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_{ik}\times r_{ik}} \qquad \hat{C}_{i_k} = \begin{pmatrix} \hat{C}_{1i_k} & \hat{C}_{2i_k} & \cdots & \hat{C}_{r_{i_k}} \end{pmatrix}_{q\times r_{ik}}$$

而 $(r_{i_1} + r_{i_2} + \cdots + r_{i_{\alpha_i}}) = \alpha_i$, 由 $\hat{\bar{C}}_{i_k}(k = 1, 2, \cdots, \alpha_i)$ 的第一列所组成的矩阵

$$\begin{pmatrix} \hat{C}_{1i_1} & \hat{C}_{1i_2} & \cdots & \hat{C}_{1i_{\alpha_i}} \end{pmatrix}$$

对 $i = 1, 2, \cdots, l$ 均为线性无关.

□

下面我们给出定理 3.1.13 的几点注记.

**注记** 3.1.10 若系统矩阵 $A$ 为每个特征值都只有一个约当块的约当矩阵, 则系统能观测的充分必要条件为对应 $A$ 的每个约当块的 $C$ 的分块的第一列都不全为零.

**注记** 3.1.11 若 $A$ 为某个特征值有多于一个约当块的约当矩阵, 则系统能观测的充分必要条件为对应于 $A$ 的每个特征值的所有约当块的 $C$ 的分块的第一列线性无关.

**注记** 3.1.13 若单输出线性定常系统的约当规范形的系统矩阵为某个特征值有多于一个约当块的约当矩阵, 则该系统不完全能观测.

**例** 3.1.11 试判断下列系统的状态能观测性.

$$(1)\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}x(t)\\ y(t)=\begin{pmatrix}3 & 0\end{pmatrix}x(t)\end{cases},\qquad (2)\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}x(t)\\ y(t)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\end{pmatrix}x(t)\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix}x(t)\\ y(t)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}x(t)\end{cases}\qquad (4)\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}x(t)\\ y(t)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\end{pmatrix}x(t)\end{cases}$$

**解:** (1) 由于 $A$ 为特征值互异的对角线矩阵，但是 $C$ 中的第二列全为零，因此由定理 3.1.13 可知该系统是不完全能观测的，且是状态 $x_2$ 不能观测.

(2) 由于 $A$ 的每个特征值都只有一个约当块，且对应于各约当块的 $C$ 的分块的第 1 列都不全为零，因此系统是完全能观测的.

(3) 由于 $A$ 中特征值 $-4$ 的两个约当块所对应的 $C$ 的分块的第 1 列线性相关，所以该系统是不完全能观测的，且是状态 $x_1, x_2$ 和 $x_2$ 不能观测.

(4) 由于该系统是单输出线性定常系统，且 $A$ 特征值 $-4$ 有多于一个约当块的约当矩阵，所以由注记 3.1.13 可知该系统不完全能观测.

□

2. **能观测性指数**

考虑完全能观测的线性定常系统 (3.1.9), 其中 $A$ 和 $C$ 分别是 $n\times n$ 和 $q\times n$ 的数值矩阵，定义

$$\bar{Q}_k=\begin{pmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{k-1}\end{pmatrix}$$

为 $kq\times n$ 数值矩阵， $k$ 正整数. 由于系统是能观测的，当 $k=n$ 时， $\bar{Q}_k=Q_o$ 为能观测性判别矩阵，且 $rank\bar{Q}_n=n$. 现考察 $k$ 由 1 增加到 $n$, 称使得 $rank\bar{Q}_k=n$ 成立的 $k$ 的最小正整数 $\nu$ 为系统的能观测性指数. 类似于能控性指数，我们可以给出估计能观测性指数 $\nu$ 的一个关系式.

**定理** 3.1.14 令 $rankC=m$, 则必成立 $\dfrac{n}{q}\le\nu\le n-m+1$. 进一步，若令 $\bar{n}$ 为矩阵 $A$ 的最小

多项式的次数，那么

$$\frac{n}{q} \le \nu \le \min(\bar{n}, n-m+1).$$

□

**注记** 3.1.14 对于单输出的系统，此时 $q=1$, 系统的能观测性指数 $\nu$ 必为 $n$.

**注记** 3.1.15 对于线性定常系统 (3.1.9), 可导出简化的能观测性秩判据：若 $rankC=m$, 则系统为能观测的充分必要条件为

$$rank\bar{Q}_{n-m+1} = rank \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-m} \end{pmatrix} = n$$

**注记** 3.1.16 若记

$$\bar{Q}_\nu = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_q \\ C_1A \\ C_2A \\ \vdots \\ C_qA \\ \vdots \\ C_1A^{\nu-1} \\ C_2A^{\nu-1} \\ \vdots \\ C_qA^{\nu-1} \end{pmatrix}$$

并且从上至下搜索 $\bar{Q}_\nu$ 中的 $n$ 个线性无关的行，考虑到 $rankC=m$, 可以将这 $n$ 个线性无关的行重

新排列为

$$\begin{matrix} C_1 \\ C_1A \\ \vdots \\ C_1A^{\nu_1-1} \\ C_2 \\ C_2A \\ \vdots \\ C_2A^{\nu_2-1} \\ \vdots \\ C_m \\ C_mA \\ \vdots \\ C_mA^{\nu_m-1} \end{matrix}$$

那么， $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m=n$. 称 $\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_m\}$ 为系统 $(A,C)$ 的能观测行指数集. 记 $\nu=\max\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_m\}$, 则 $\nu$ 即为能观测性指数。可以证明：系统的能观测性指数和能观测性指数集在系统的线性非奇异变换下保持不变.

3. **线性时变系统的能观测性判据**

对于线性时变系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=A(t)x(t), \quad x(t_0)=x_0,t,t_0\in J \\ y(t)=C(t)x(t) \end{cases} \tag{3.1.10}$$

其中， $J$ 为时间定义区间. $A(t)$ 和 $C(t)$ 分别为 $n\times n$ 和 $q\times n$ 时变矩阵，下面给出线性时变系统 (3.1.10) 的能观测性判据.

**定理** 3.1.15(Gram 矩阵判据) 线性时变系统 (3.1.10) 在时刻 $t_0$ 为完全能观测的充分必要条件是：存在一个有限时刻 $t_1\in J,t_1>t_0$ ，使得如下定义的 Gram 矩阵

$$W_o[t_0,t_1]=\int_{t_0}^{t_1}\Phi^T(t,t_0)C^T(t)C(t)\Phi(t,t_0)dt$$

为非奇异的，其中 $\Phi(\cdot,\cdot)$ 为线性时变系统 (3.1.10) 的状态转移矩阵.

□

通常 Gram 矩阵判据主要用于理论分析.

**定理** 3.1.16(秩判据) 设 $A(t)$ 和 $C(t)$ 是 $(n-1)$ 阶连续可微的，则线性时变系统 (3.1.0) 在时刻 $t_0$ 为完全能观测的一个充分条件是：存在一个有限时刻 $t_1 \in J, t_1 > t_0$ ，使得

$$rank \begin{pmatrix} N_0(t_1) \\ N_1(t_1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(t_1) \end{pmatrix} = n$$

其中

$$\begin{cases} N_0(t) & = & C(t) \\ N_1(t) & = & N_0(t)A(t) + \dfrac{d}{dt}N_0(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{n-1}(t) & = & N_{n-2}(t)A(t) + \dfrac{d}{dt}N_{n-2}(t) \end{cases}$$

□

**例** 3.1.14 试判断如下时变系统的状态能观测性.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

**解**：由于 $A(t), C(t)$ 高阶连续可导，因此可采用秩判据. 由定理 3.1.16 可知

$$\begin{cases} N_0(t) & = & C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ N_1(t) & = & N_0(t)A(t) + \dfrac{d}{dt}N_0(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & t^2 \end{pmatrix} \\ N_2(t) & = & N_1(t)A(t) + \dfrac{d}{dt}N_1(t) = \begin{pmatrix} t^2+1 & 2t & t^4+2t \end{pmatrix} \end{cases}$$

所以

$$rank \begin{pmatrix} N_0(t) & N_1(t) & N_2(t) \end{pmatrix}^T = rank \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & t^2 \\ t^2+1 & 2t & t^4+2t \end{pmatrix} = 3 = n$$

所以系统是完全能观测的.

□

§ 3.1.4 **线性定常离散系统的能控性和能观测性**

由于线性连续系统只是线性离散系统当采样周期趋于无穷小时的无限接近，所以离散系统的状态能控性和能观测性的定义与线性连续系统的极其相似，线性定常离散系统和线性定常连续系统的能控性和能观性判据，则在形式上基本一致.

1. **线性定常离散系统的能控性与能达性**

状态能控性讨论的是系统输入对状态空间中任意初始状态控制到坐标原点 (平衡态) 的能力，而状态能达性讨论的是系统输入对坐标原点 (平衡态) 的初始状态控制到状态空间中任意状态的能力. 对线性定常连续系统来说，状态能控性与能达性虽然定义不同，两者的判据却是等价的，但是对于线性定常离散系统来说，这两者无论是定义还是判据都是有所不同的.

与线性连续系统的状态能控性问题一样，对离散系统的能控性与能达性问题也只考虑系统状态方程，与输出方程和输出变量 $y(k)$ 无关.

(I) **线性定常离散系统状态能控性与能达性定义**

**定义** 3.1.7(线性定常离散系统状态能控性定义) 如果对线性定常离散系统

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \tag{3.1.11}$$

的某个初始状态 $x(0) = x_0$, 存在控制作用序列 $\{u(0), u(1), \cdots, u(n-1)\}$, 使系统状态在第 $n$ 步上到达零状态，即 $x(n) = 0$, 则称此系统的状态 $x_0$ 是能控的. 若系统对状态空间的所有状态都是能控的，则称系统状态完全能控，简称为系统能控. 若系统存在某个状态 $x_0$ 不满足上述条件，则称此系统是状态不完全能控的，简称为状态不能控.

在上述线性定常离散系统的状态能控性的定义中，只要求在 $n$ 步之内寻找控制作用序列 $\{u(0), u(1), \cdots, u(n-1)\}$, 使得系统状态在第 $n$ 步上到达零点. 可以证明，若离散系统在 $n$ 步之内不存在控制作用序列使系统的状态对任意的初始状态控制到原点，则在 $n$ 步之后也不存在控制作用序列使系统的状态在有限步之内控制到原点. 故在上述定义中只要求系统在 $n$ 步之内寻找控制作用序列.

**定义** 3.1.8(线性定常离散系统状态能达性定义) 对线性定常离散系统 (3.1.11), 若对某个最终状态 $x_1$, 存在控制作用序列 $\{u(0), u(1), \cdots, u(n-1)\}$, 使得系统状态从零状态在第 $n$ 步上到达最终状态 $x_1$, 即 $x(n) = x_1$, 则称此系统的状态 $x_1$ 是能达的. 若系统对状态空间中所有状态都能达，则称系统状态完全能达. 若系统存在某个状态 $x_1$ 不满足上述条件，则称此系统是状态不完全能达的，简称系统为状态不能达.

(II) **线性定常离散系统的状态能控性判据**

与线性定常连续系统不同，线性定常离散系统的状态能控性与能达性的判据两者不等价. 线性

定常离散系统的状态能达性与连续系统的状态能达性判据形式上完全一样，而状态能控性的判据则有所区别.

**定理** 3.1.17(线性定常离散系统的的能控性秩判据) 对线性定常离散系统 (3.1.11), 有如下能控性结论.

(1) 若系统矩阵 $G$ 为非奇异矩阵，则状态完全能控的充分必要条件为

$$rankQ_c = rank\begin{pmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{pmatrix} = n$$

其中 $Q_c$ 称为系统的能控性判别矩阵.

(2) 若系统矩阵 $G$ 为奇异矩阵，则状态完全能控的充分必要条件为

$$rankQ_c = rank(Q_c, G^n).$$

**证明**：由定理 2.3.3 可知线性定常离散系统 (3.1.11) 的解为

$$x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} H u(j) \tag{3.1.12}$$

设在第 $n$ 步上能使初始状态 $x(0)$ 转移到零状态，于是 (3.1.12) 式可记为

$$0 = G^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} G^{n-j-1} H u(j)$$

即

$$\begin{aligned} -G^n x(0) &= \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} G^{n-j-1} H u(j) = [G^{n-1}Hu(0) + G^{n-2}Hu(1) + \cdots + Hu(n-1)] \\ &= \begin{pmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

这是一个非齐次线性代数方程. 由线性方程解的存在性理论可知， (3.1.13) 式存在控制向量解序列 $\{u(0), u(1), \cdots, u(n-1)\}$ 的充分必要条件为

$$rank\begin{pmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H & G^n x(0) \end{pmatrix} \tag{3.1.14}$$

考虑到系统的初始状态 $x(0)$ 是属于 $n$ 维状态空间的任意一个状态，因此上式等价于

$$rank\begin{pmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H & G^n \end{pmatrix}$$

由此证明系统状态完全能控的充分必要条件为系统的能控性矩阵满足

$$rankQ_c = rank(Q_c,\, G^n)$$

即定理的结论 (2) 成立.

当系统矩阵 $G$ 为非奇异时，显然有 $rankQ_c = n$, 因此判别条件 (3.1.14) 右端为

$$rank(Q_c,\, G^n) = n$$

所以此时系统状态完全能控的充分必要条件为

$$rankQ_c = rank\begin{pmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{pmatrix} = n.$$

□

**例** 3.1.15 试判断如下系统的状态能控性.

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k)$$

**解**：显然系统矩阵 $G$ 是奇异的，由于

$$\begin{aligned} rankQ_c &= rank\begin{pmatrix} H & GH \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \\ rank(Q_c,\, G^2) &= rank\begin{pmatrix} H & GH & G^2 \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

即 $rankQ_c = rank(Q_c,\, G^2)$, 因此由定理 3.1.17(2) 可知该系统是完全能控的.

□

**例** 3.1.16 试判断如下系统的状态能控性.

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

**解**：由于系统矩阵 $G$ 非奇异，并且

$$rankQ_c = rank\begin{pmatrix} H & GH & G^2H \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 < n$$

所以，由定理 3.1.17(1) 可知该系统是不完全能控的.

□

(III) **线性定常离散系统的状态能达性判据**

由上述线性定常离散系统的状态能控性秩判据可知，离散系统的能控性与连续系统的能控性存在着一定的差别. 对于线性定常连续系统，由系统矩阵和输入矩阵构造的能控性判别矩阵的秩等于状态变量的个数，这是状态完全能控的充分必要条件，而对于线性定常离散系统的状态能控性则仅是一个充分条件. 造成线性连续系统和线性离散系统的状态能控性判据形式上有差别的原因在于：线性连续系统的状态能控性和状态能达性是两个等价的概念，而线性定常离散系统的状态能控性和状态能达性则是两个不等价的概念.

**定理** 3.1.18(线性定常离散系统的的能达性秩判据) 对线性定常离散系统 (3.1.11), 状态完全能达的充分必要条件为

$$rankQ_c = rank\begin{pmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{pmatrix} = n$$

其中 $Q_c$ 称为系统的能控性判别矩阵.

□

**定理** 3.1.19(线性定常离散系统的的能达性 PBH 判据) 对线性定常离散系统 (3.1.11), 状态完全能达的充分必要条件为：对所有复数 $\lambda$, 有

$$rank(\lambda I - G,\, H) = n.$$

□

**定理** 3.1.20(线性定常离散系统的的能达性若当规范形判据) 对已化为约当规范形的线性定常离散系统，有

(1) 若系统矩阵 $G$ 为每个特征值都只有一个约当块的约当矩阵，则系统能达的充分必要条件为对应 $G$ 的每个约当块的 $H$ 的分块的最后一行都不为零.

(2) 若系统矩阵 $G$ 为某个特征值有多于一个的约当块的约当矩阵，则系统能达的充分必要条件为对应 $G$ 的每个特征值的所有约当块的 $H$ 的分块的最后一行线性无关.

□

2. **线性定常离散系统的状态能观性**

与线性连续系统一样，线性离散系统的状态能观性只与系统输出 $y(t)$, 系统矩阵 $G$ 和输出矩阵 $C$ 有关，即只需考虑齐次状态方程和输出方程即可. 因此，有如下线性定常离散系统状态能观测性的定义.

**定义** 3.1.9 对线性定常离散系统

$$\begin{cases} x(k+1) & = & Gx(k) \\ y(k) & = & Cx(k) \end{cases} \tag{3.1.15}$$

若根据在 $n$ 个采样周期内采样得到的输出向量 $y(k)$ 的序列 $\{y(0), y(1), \cdots, y(n-1)\}$ 能唯一地确定系统的初始状态 $x(0)$, 则称系统的状态 $x(0)$ 能观测. 若对状态空间中的所有状态都能观测，则称系统状态完全能观测，简称为系统能观测.

若系统存在某个状态 $x(0)$ 不满足上述条件，则称此系统是状态不完全能观测的，简称系统为状态不能观测.

在线性定常离散系统的状态能观测性定义中，只要求以在 $n$ 个采样周期内采样到的输出确定系统的状态. 可以证明，如果在 $n$ 个采样周期内测得的输出向量序列不能唯一确定系统的初始状态，则多于 $n$ 个采样周期测得的输出向量序列也不能唯一确定系统的初始状态.

对线性定常离散系统，存在与线性定常连续系统在形式上完全一致的状态能观测性的秩判据和约当规范形判据. 下面先介绍秩判据.

**定理** 3.1.21(秩判据) 对于线性定常离散系统 (3.1.15), 状态完全能观测的充分必要条件为

$$rankQ_o = rank\begin{pmatrix} C & CG & \cdots & CG^{n-1} \end{pmatrix}^T = n$$

其中 $Q_o$ 称为系统的能观测性判别矩阵.

**证明**：由线性定常离散系统的状态空间求解公式可得

$$\begin{array}{lcl} y(0) & = & Cx(0) \\ y(1) & = & Cx(1) = CGx(0) \\ & \cdots & \\ y(n-1) & = & Cx(n-1) = CG^{n-1}x(0) \end{array}$$

将上述 $n$ 个方程写成矩阵的形式，有

$$Q_o x(0) = \begin{pmatrix} C & CG & \cdots & CG^{n-1} \end{pmatrix}^T x(0) = \begin{pmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(n-1) \end{pmatrix}^T$$

由于输出向量 $y(k)$ 和状态向量 $x(k)$ 满足输出方程，故上述方程为相容方程 (非矛盾方程). 因此，由线性方程解的存在性理论可知，无论输出向量的维数是否大于 1, 上述方程有 $x(0)$ 的唯一解的充分必要条件为

$$rankQ_o = n$$

由能观测性的定义可知， $rankQ_o = n$ 亦为线性定常离散系统 (3.1.15) 状态完全能观测的充分必要条件.

□

**例** 3.1.17 试判断如下系统的状态能观测性

$$\begin{cases} x(k+1) & = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} x(k) \\ y(k) & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(k) \end{cases}$$

**解**：由定理 3.1.21 可知

$$rankQ_o = rank \begin{pmatrix} C & CG & CG^2 \end{pmatrix}^T = rank \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = 3 = n$$

故系统是完全能观测的.

□

**定理** 3.1.22(PBH 判据) 线性定常离散系统 (3.1.15) 完全能观测的充分必要条件为：对于所有的复数 $\lambda$, 有

$$rank \begin{pmatrix} \lambda I - G \\ C \end{pmatrix} = n.$$

□

**定理** 3.1.23(约当规范形判据) 对已化为约当规范形的线性定常离散系统，有

(1) 若系统矩阵 $G$ 为每个特征值都只有一个约当块的约当矩阵，则系统能观测的充分必要条件为对应 $G$ 的每个约当块的 $C$ 的分块的第 1 列都不全为零.

(2) 若系统矩阵 $G$ 的某个特征值有多于一个约当块的约当矩阵，则系统能观测的充分必要条件为对应 $G$ 的每个特征值的所有约当块的 $C$ 的分块的第 1 列线性无关.

□

3. **离散化线性定常系统的状态能控性和能观测性**

离散化线性定常系统的状态能控性和能观测性问题，是指线性定常连续系统经离散化 (采样) 后是否仍能保持其状态能控性和能观测性的问题，这个问题在计算机控制中是一个十分重要的问题. 在具体讨论之前先看一个例子.

**例** 3.1.17 判断如下线性定常连续系统离散化后的状态的能控性和能观测性.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

**解:** (1) 判断原连续系统的能控性和能观测性. 因为

$$\begin{aligned} rank\begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} &= rank\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 = n \\ rank\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} &= rank\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 = n \end{aligned}$$

所以原连续系统是状态完全能控且能观测的.

(2) 求连续系统的离散化系统. 由离散化步骤首先计算系统特征值

$$| sI - A |= \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{pmatrix} = s^2 + 1 = (s+i)(s-i)$$

即系统的特征值为 $s_1 = i$, $s_2 = -i$, 则

$$\begin{pmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 1 & s_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^{s_1 t} \\ e^{s_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^{it} \\ e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

因此

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A = \cos tI + \sin tA = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$G = e^{AT} = \begin{pmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{pmatrix}, \quad H = \int_0^T e^{At} dt B = \begin{pmatrix} \sin T \\ \cos T - 1 \end{pmatrix}$$

所以离散化后的系统状态空间模型为

$$\begin{cases} x(k+1) & = & \begin{pmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} \sin T \\ \cos T - 1 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) \end{cases}$$

(3) 求离散化后的系统的状态能控性和能观测性. 由上述离散化后系统的状态方程可知系统的状态能控性矩阵和能观测性矩阵分别为

$$\begin{aligned}
Q_c &= \begin{pmatrix} H & GH \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin T & -\sin T + 2\cos T \sin T \\ \cos T - 1 & \cos^2 T - \sin^2 T - \cos T \end{pmatrix} \\
Q_o &= \begin{pmatrix} C \\ CG \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin T & \cos T \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

由于系统矩阵 $G = e^{AT}$ 为可逆矩阵，因此由定理 3.1.17 和定理 3.1.21 可知离散化系统的状态能控和能观测的充分必要条件为 $Q_c, Q_o$ 均满秩.

若取 $T = k\pi (k = 1, 2, \cdots)$, 即 $\sin T = 0, \cos T = \pm 1$, 则有

$$\begin{aligned}
rankQ_c &= rank \begin{pmatrix} \sin k\pi & -\sin k\pi + 2\cos k\pi \sin k\pi \\ \cos k\pi - 1 & \cos^2 k\pi - \sin^2 k\pi - \cos k\pi \end{pmatrix} \\
&= rank \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pm 1 - 1 & 1 \mp 1 \end{pmatrix} \leq 1 < 2 = n \\
rankQ_o &= rank \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin k\pi & \cos k\pi \end{pmatrix} = rank \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = 1 < 2 = n
\end{aligned}$$

因此，此时离散化系统即不完全能控也不完全能观测.

若取 $T \neq k\pi (k = 1, 2, \cdots)$, 即 $\sin T \neq 0, \cos T \neq \pm 1$, 则有

$$\begin{aligned}
\mid Q_c \mid &= \begin{vmatrix} \sin T & -\sin T + 2\cos T \sin T \\ \cos T - 1 & \cos^2 T - \sin^2 T - \cos T \end{vmatrix} \\
&= \sin T(-\sin^2 T - \cos^2 T - 1 + 2\cos T) = \sin T(2\cos T - 2) \\
\mid Q_o \mid &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin T & \cos T \end{vmatrix} = \sin T
\end{aligned}$$

因此

$$rankQ_c = 2 = n, \;\; rankQ_o = 2 = n$$

所以此时系统是完全能控和完全能观测的.

□

由例 3.1.17 可以看出，若连续系统是状态完全能控 (能观测) 的，经离散化之后能否保持系统的状态完全能控 (能观测), 这完全取决于系统采样周期的选择. 对离散化系统的状态能控性和能观测性与原连续系统的态能控性和能观测性，以及采样周期 $T$ 的选择的关系有如下结论.

设线性定常连续系统的状态空间模型为 $\Sigma(A,B,C)$, 经离散化后的状态空间模型为 $\Sigma(G,H,C)$, 其中

$$G=e^{AT},\ \ H=\int_0^T e^{At}dtB$$

则连续系统和其离散化系统两者之间的状态能控性和能观测性如下.

(1) 如果连续系统是状态不完全能控 (不完全能观测) 的，则其离散化系统必是状态不完全能控 (不完全能观测) 的.

(2) 如果连续系统是状态完全能控 (完全能观测) 的且其特征值全部为实数，则其离散化系统必是状态完全能控 (完全能观测) 的.

(3) 如果连续系统是状态完全能控 (完全能观测) 的且存在共轭复数特征值，则其离散化系统状态完全能控 (完全能观测) 的充分条件为：对于所有满足 $Re(\lambda_i-\lambda_j)=0$ 的 $A$ 的特征值 $\lambda_i$ 和 $\lambda_j$ 应满足

$$T\neq\frac{2k\pi}{Im(\lambda_i-\lambda_j)},\ \ (k=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$$

这里的符号 $Re$ 和 $Im$ 分别表示取复数的实数部分和虚数部分.

在例 3.1.17 中， $A$ 的特征值为 $\lambda_1=i,\,\lambda_2=-i,$, 即满足 $Re(\lambda_1-\lambda_2)=0$. 所以当

$$T\neq\frac{2k\pi}{Im(\lambda_i-\lambda_j)},\ \ (k=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$$

时，离散化系统才是状态完全能控 (完全能观测) 的.

### § 3.1.5 对偶原理

上述讨论已经看到，系统的能控性和能观测性之间在定义与判据的形式上都有对偶性. 下面，我们将进一步揭示系统这种内在对偶关系，即对偶原理.

首先，引进线性时变系统的对偶系统. 对于下述线性时变系统

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)\\ y(t)=C(t)x(t)\end{cases}\tag{3.1.16}$$

其中，状态向量 $x(t)$, 输入向量 $u(t)$ 和输出向量 $y(t)$ 分别为 $n\times1$,$p\times1$ 和 $q\times1$ 的列向量，定义如下线性时变系统

$$\Sigma_d:\begin{cases}\dot{x}_d^T(t)=-A^T(t)x_d^T(t)+C^T(t)u_d^T(t)\\ y_d^T(t)=B^T(t)x_d^T(t)\end{cases}\tag{3.1.17}$$

其中状态向量 $x_d$ ，输入向量 $u_d$ 和输出向量 $y_d$ 分别为 $1\times n$, $1\times q$ 和 $1\times p$ 的行向量，称线性时变系统 $\Sigma_d$ 为线性时变系统 $\Sigma$ 的对偶系统。

**定理** 3.1.17 若 $\Phi(t,t_0)$ 为线性时变系统 $\Sigma$ 的状态转移矩阵， $\Phi_d(t,t_0)$ 为其对偶系统 $\Sigma_d$ 的状态转移矩阵，那么

$$\Phi_d(t,t_0)=\Phi^T(t_0,t).$$

**证明**：由于 $\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(t,t_0)=I$ ，两边关于 $t$ 求导可得

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}[\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(t,t_0)] = \frac{d}{dt}[\Phi(t,t_0)]\Phi^{-1}(t,t_0)+\Phi(t,t_0)\frac{d}{dt}[\Phi^{-1}(t,t_0)] \\
&= A(t)\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(t,t_0)+\Phi(t,t_0)\dot{\Phi}(t_0,t) \\
&= A(t)+\Phi(t,t_0)\dot{\Phi}(t_0,t)
\end{aligned}$$

由此可得

$$\dot{\Phi}(t_0,t)=-\Phi(t_0,t)A(t),\ \ \Phi(t_0,t_0)=I.$$

即

$$\dot{\Phi}^T(t_0,t)=-A^T(t)\Phi^T(t_0,t),\ \ \Phi^T(t_0,t_0)=I.$$

再注意到

$$\dot{\Phi}_d(t,t_0)=-A^T(t)\Phi_d(t,t_0),\ \ \Phi_d(t_0,t_0)=I,$$

因此

$$\Phi_d(t,t_0)=\Phi^T(t_0,t).$$

□

**定理** 3.1.18 (1) 线性时变系统 $\Sigma$ 是完全能控的当且仅当其对偶系统 $\Sigma_d$ 是完全能观测的.

(2) 线性时变系统 $\Sigma$ 是完全能观测的当且仅当其对偶系统 $\Sigma_d$ 是完全能控的.

**证明**: (1) 由 Gram 矩阵判据，若线性时变系统 $\Sigma$ 在时刻 $t_0$ 是完全能控的，那么存在有限时刻 $t_1>t_0$ 使得

$$\begin{aligned}
n &= rank[\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_0,t)dt] \\
&= rank[\int_{t_0}^{t_1}[\Phi^T(t_0,t)]^T[B^T(t)]^T[B^T(t)][\Phi^T(t_0,t)]dt] \\
&= rank[\int_{t_0}^{t_1}\Phi_d^T(t,t_0)[B^T(t)]^T[B^T(t)]\Phi_d(t,t_0)dt]
\end{aligned}$$

这表明对偶系统 $\Sigma_d$ 在时刻 $t_0$ 为完全能观测的，反之亦然.

(2) 由 Gram 矩阵判据, 若线性时变系统 $\Sigma$ 在时刻 $t_0$ 是完全能观测的, 那么存在有限时刻 $t_1 > t_0$ 使得

$$\begin{aligned} n &= rank[\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t,t_0)C^T(t)C(t)\Phi(t,t_0)dt] \\ &= rank[\int_{t_0}^{t_1} [\Phi^T(t,t_0)][C^T(t)][C^T(t)]^T[\Phi^T(t,t_0)]^T dt] \\ &= rank[\int_{t_0}^{t_1} \Phi_d(t_0,t)[C^T(t)][C^T(t)]^T\Phi_d^T(t_0,t)dt] \end{aligned}$$

□

这表明对偶系统 $\Sigma_d$, 在时刻 $t_0$ 为完全能控的，反之亦然，对偶性原理提供了由一种系统结构特性的判据导出另一种系统结构特性的判据的有效途径，而且也揭示了系统控制问题和估计问题之间的对应关系，这在理论和应用上都是很重要的.

## §3.2 线性定常系统的规范形

对于完全能控或完全能观测的线性定常系统，如果从能控或能观测这个基本属性出发来构造一个非奇异的变换矩阵, 使得系统的状态空间描述在这一线性变换下化为能控系统或能观测系统的标准形式，则称系统这种标准形式的状态空间描述为系统的能控规范形或能观测规范形.

### § 3.2.1 单输入 - 单输出线性定常系统的能控规范形与能观测规范形

**1. 单输入 - 单输出线性定常系统的能控规范形**

考虑完全能控的单输入 - 单输出线性定常系统

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{3.2.1}$$

其中， $A$ 为 $n \times n$ 常值矩阵， $b$ 和 $C$ 分别为 $n \times 1$ 和 $1 \times n$ 常值矩阵. 由于系统 (3.2.1) 是完全能控的，所以

$$rank \begin{pmatrix} b & \vdots & Ab & \vdots & \cdots & \vdots & A^{n-1}b \end{pmatrix} = n. \tag{3.2.2}$$

设系统 (3.2.1) 的特征多项式为

$$\det(sI - A) = \alpha(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0, \tag{3.2.3}$$

并定义如下 $n$ 个常数

$$\left\{\begin{array}{lll}\beta_{n-1} & = & Cb \\ \beta_{n-2} & = & CAb+\alpha_{n-1}Cb \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_1 & = & CA^{n-2}b+\alpha_{n-1}CA^{n-3}b+\cdots+\alpha_2 Cb \\ \beta_0 & = & CA^{n-1}b+\alpha_{n-1}CA^{n-2}b+\cdots+\alpha_1 Cb\end{array}\right. \tag{3.2.4}$$

进一步，由 (3.2.2) 及 (3.2.3) 可以定义如下非奇异变换矩阵

$$P=\begin{pmatrix} e_1, & e_2, & \cdots, & e_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^{n-1}b, & \cdots, & Ab, & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & \\ \alpha_{n-1} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\ \ \alpha_{n-1} & 1\end{pmatrix} \tag{3.2.5}$$

这样，我们获得下述定理.

**定理** 3.2.1 对于完全能控的单输入 - 单输出线性定常系统 (3.2.1), 做线性非奇异变换 $\bar{x}=P^{-1}x$, 可将系统化为如下的能控规范形

$$\Sigma_c:\left\{\begin{array}{lll}\dot{\bar{x}}(t) & = & A_c\bar{x}(t)+b_c u(t) \\ y(t) & = & C_c\bar{x}(t)\end{array}\right. \tag{3.2.6}$$

其中

$$\begin{array}{lll}A_c & = & P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1}\end{pmatrix} \\ b_c & = & P^{-1}b=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}^T \\ C_c & = & CP=\begin{pmatrix}\beta_0, & \beta_1, & \cdots, & \beta_{n-1}\end{pmatrix}.\end{array}$$

**证明**：第 1 步：计算矩阵 $A_c$. 由于 $A_c = P^{-1}AP$, 所以

$$\begin{aligned}
PA_c &= AP = A\begin{pmatrix} e_1, & e_2, & \cdots, & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae_1, & Ae_2, & \cdots, & Ae_n \end{pmatrix} \\
&= A\begin{pmatrix} A^{n-1}b, & \cdots, & Ab, & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^n b, & \cdots, & A^2 b, & Ab \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

再利用 Cayley-Hamilton 定理可知 $\alpha(A) = 0$, 于是

$$\begin{cases}
Ae_1 &= A^n b + \alpha_{n-1}A^{n-1}b + \cdots + \alpha_1 Ab \\
&= (A^n b + \alpha_{n-1}A^{n-1}b + \cdots + \alpha_1 Ab + \alpha_0 b) - \alpha_0 b \\
&= \alpha(A)b - \alpha_0 b = -\alpha_0 e_n \\
Ae_2 &= A^{n-1}b + \alpha_{n-1}A^{n-2}b + \cdots + \alpha_2 Ab \\
&= (A^{n-1}b + \alpha_{n-1}A^{n-2}b + \cdots + \alpha_2 Ab + \alpha_1 b) - \alpha_1 b \\
&= e_1 - \alpha_1 e_n \\
\cdots & \cdots \ \cdots \\
Ae_{n-1} &= A^2 b + \alpha_{n-1}Ab = (A^2 + \alpha_{n-1}Ab + \alpha_{n-2}b) - \alpha_{n-2}b = e_{n-2} - \alpha_{n-2}e_n \\
Ae_n &= Ab = (Ab + \alpha_{n-1}b) - \alpha_{n-1}b = e_{n-1} - \alpha_{n-1}e_n
\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}
PA_c &= \begin{pmatrix} -\alpha_0 e_n, & e_1 - \alpha_1 e_n, & \cdots, & e_{n-2} - \alpha_{n-2}e_n, & e_{n-1} - \alpha_{n-1}e_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e_1, & e_2, & \cdots, & e_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= P\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

再注意到 $P$ 是非奇异的，因此可得 $A_c$ 为所求表达式.

第 2 步：计算列向量 $b_c$. 由于 $b_c = P^{-1}b$, 于是

$$Pb_c = b = e_n = \begin{pmatrix} e_1, & e_2, & \cdots, & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = P \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

由 $P$ 的非奇异性可知， $b_c$ 为所求表达式.

第 3 步：计算行向量 $C_c$, 直接计算

$$\begin{aligned} C_c &= CP = C \begin{pmatrix} A^{n-1}b, & \cdots, & Ab, & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} CA^{n-1}b, & \cdots, & CAb, & Cb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_0, & \beta_1, & \cdots, & \beta_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

2. **单输入 - 单输出线性定常系统的能观测规范形**

考虑完全能观测的单输入 - 单输出线性定常系统 (3.2.1), 由于系统是完全能观测的，所以

$$rank \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n. \tag{3.2.7}$$

进一步，由 (3.2.7) 和系统的多项式 (3.2.3) 定义如下非奇异变换矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_2 & \alpha_1 \\ & 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_3 & \alpha_2 \\ & & 1 & \cdots & \alpha_4 & \alpha_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & \alpha_{n-1} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} CA^{n-1} \\ \vdots \\ CA \\ C \end{pmatrix}.$$

这样，我们获得如下定理.

**定理** 3.2.2 对于完全能观测的单输入 - 单输出线性定常系统 (3.2.1), 作线性非奇异变换 $\hat{x}(t) = Qx(t)$, 可将系统化为如下的能观测规范形

$$\Sigma_0 : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &=& A_0\hat{x}(t) + b_0u(t) \\ y(t) &=& C_0\hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.2.8}$$

其中

$$A_0 = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b_0 = Qb = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$C_0 = CQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0, & \cdots, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

**证明:** (作业).

□

**定理** 3.2.3 代数等价的完全能控系统具有相同的能控规范形，代数等价的完全能观测系统具有相同的能观测规范形.

**证明**：从定理 3.2.1 和定理 3.2.2 可见系统的能控规范形和能观测规范形由系统的特征多项式 $\alpha(s)$ 和常数 $\beta_i(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 完全确定．故只需证明代数等价系统的特征多项式 $\alpha(s)$ 和常数 $\beta_i(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 相同即可.

现设系统 $(A, b, C)$ 和系统 $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{C})$ 代数等价, 即存在线性非奇异矩阵 $T$, 使得 $\bar{A} = TAT^{-1}, \bar{b} = Tb, \bar{C} = CT^{-1}$. 于是

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(s) &= \det(sI - \bar{A}) = \det(sI - TAT^{-1}) = \det T(sI - A)T^{-1} \\ &= \det T \cdot \det(sI - A) \cdot \frac{1}{\det T} = \det(sI - A) = \alpha(s), \\ \bar{\beta}_{i-1} &= \bar{C}\bar{A}^{n-i}\bar{b} + \bar{\alpha}_{n-1}\bar{C}\bar{A}^{n-i-1}\bar{b} + \cdots + \bar{\alpha}_i\bar{C}\bar{b} \\ &= CT^{-1} \cdot TA^{n-i}T^{-1} \cdot Tb + \alpha_{n-1}CT^{-1} \cdot TA^{n-i-1}T^{-1} \cdot Tb + \cdots + \alpha_iCT^{-1} \cdot Tb \\ &= CA^{n-i}b + \alpha_{n-1}CA^{n-i-1}b + \cdots + \alpha_iCb \\ &= \beta_{i-1}, \end{aligned}$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, n$.

□

**例** 3.2.1 对于给定的如下单输入 - 单输出线性定常系统 $\Sigma$ :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t), \end{cases}$$

(1) 判断系统的能控与能观测性;

(2) 给出它的能控规范形和能观测规范形;

(3) 给出规范形中系统的状态向量.

**解**: (1) 由于

$$\begin{aligned} \det Q_c &= \det \begin{pmatrix} b & Ab & A^2 b \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 10 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = 28, \\ \det Q_o &= \det \begin{pmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} = -32 \end{aligned}$$

(2) 由于系统的特征多项式

$$\alpha(s) = \det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s-1 & 0 & -2 \\ -2 & s-1 & -1 \\ -1 & 0 & s+2 \end{pmatrix} = s^3 - 0s^2 - 5s + 4,$$

所以 $\alpha_0 = 4, \alpha_1 = -5, \alpha_2 = 0$, 常数

$$\begin{cases} \beta_2 &= Cb = 3 \\ \beta_1 &= CAb + \alpha_2 Cb = 4 \\ \beta_0 &= CA^2 b + \alpha_2 CAb + \alpha_1 Cb = 0 \end{cases}$$

于是, 系统的能控规范形为

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \;,\; y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \bar{x}(t)$$

系统的能观测规范形为

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{x}(t)$$

(3) 由定理 3.2.1 可知，系统能控规范形的变换矩阵为

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} A^2b & \vdots & Ab & \vdots & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 10 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其逆矩阵

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{28} \\ 0 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

于是，能控规范形中系统的状态向量为

$$\bar{x}(t) = P^{-1}x(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{28} \\ 0 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x_1(t) + \frac{1}{7}x_2(t) - \frac{1}{28}x_3(t) \\ \frac{1}{7}x_2(t) - \frac{2}{7}x_3(t) \\ \frac{1}{7}x_2(t) + \frac{5}{7}x_3(t) \end{pmatrix}$$

又由定理 3.2.2 可知，系统的能观测性变换矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cA^2 \\ cA \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

于是，能观测规范形中系统的状态向量为

$$\hat{x}(t) = Qx(t) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1(t) - 4x_2(t) + 4x_3(t) \\ 3x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ x_2(t) + x_3(t) \end{pmatrix}.$$

**注意**：在本例中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

□

§ 3.2.2 **多输入 - 多输出线性定常系统的** Wonham **规范形**

我们考虑多输入 - 多输出线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.2.9}$$

其中，$A$ 为 $n \times n$ 数值矩阵，$B$ 和 $C$ 分别为 $n \times p$ 和 $q \times n$ 数值矩阵. 记

$$Q_k = \begin{pmatrix} B & \vdots & AB & \vdots & A^2B & \vdots & \dots & \vdots & A^{k-1}B \end{pmatrix}$$

为 $n \times kp$ 数值矩阵. 当 $k = n$ 时，$Q_n = Q_c$ 为能控性判别矩阵，并且 $rankQ_c = n, rankB = r$. 若 $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\}$ 为系统的能控性指数集. $\mu = \max\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\}$ 为系统的能控性指数，且 $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = n$. 在矩阵

$$Q_\mu = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p & \vdots & Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p & \vdots & \cdots & \vdots & A^{\mu-1}b_1 & A^{\mu-1}b_2 & \cdots & A^{\mu-1}b_p \end{pmatrix}$$

中可以搜索到下列 $n$ 个线性无关的列

$$\{b_1, Ab_1, \cdots, A^{\mu_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \cdots, A^{\mu_2-1}b_2, \cdots, b_r, Ab_r, \cdots, A^{\mu_r-1}b_r\}$$

同理，记 $\bar{Q}_k = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{pmatrix}$ 为 $kq \times n$ 数值矩阵. 当 $k = n$ 时，$\bar{Q}_k = Q_0$ 为能观测性判别矩阵，并且 $rankQ_0 = n, rankC = m$. 若 $\{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m\}$ 为系统的能观测性指数集，$\nu = \max\{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m\}$

为系统的能观测指数，并且 $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m=n$. 在矩阵 $\bar{Q}_\nu=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_q \\ \cdots \\ c_1A \\ \vdots \\ c_qA \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ c_1A^{\nu-1} \\ \vdots \\ c_qA^{\nu-1} \end{pmatrix}$ 中可以搜索到下列 $n$ 个线性无关行 $\left\{\begin{matrix} c_1 \\ c_1A \\ \vdots \\ c_1A^{\nu_1-1} \\ c_2 \\ c_2A \\ \vdots \\ c_2A^{\nu_2-1} \\ \vdots \\ c_m \\ \vdots \\ c_mA^{\nu_m-1} \end{matrix}\right\}$

问题：怎样搜索线性无关的列或线性无关的行呢？

为了找出 $Q_c$ 的 $n$ 个线性无关的列，通常采用下面按列搜索方法：对于给定的 $(A,B)$, 记 $B=(b_1,b_2,\cdots,b_p)$, 按列搜索 $Q_c=\{B\vdots AB\vdots\cdots\vdots A^{n-1}B\}$ 的 $n$ 个线性无关的列. 首先选定 $b_1$, 按列的方向进行搜索. 如果 $Ab_1$ 和 $b_1$ 线性无关，记为 $\{b_1,Ab_1\}$. 如此逐列对每个 $A^iB$ 的第一列继续搜索下去，直到发现向量 $A^{\mu_1}b_1$ 与前列各向量 $b_1,Ab_1,\cdots,A^{\mu_1-1}b_1$ 线性相关为止. 如果如上找到的

线性无关的向量个数 $\mu_1 < n$, 则继续逐列对每个 $A^{\tilde{i}}B$ 的第二列开始搜索，若 $b_2$ 与 $\{b_1, Ab_1, \cdots, A^{\mu_1-1}b_1\}$ 线性无关, 则记 $\{b_1, Ab_1, \cdots, A^{\mu_1-1}b_1, b_2\}$, 对于 $b_2$ 继续搜索, 直到找到一个向量 $A^{\mu_2}b_2$ 与 $\{b_1, Ab_1, \cdots, A^{\mu_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \cdots, A^{\mu_2-1}b_2\}$ 线性相关为止. 若 $b_2$ 与 $\{b_1, Ab_1, \cdots, A^{\mu_1-1}b_1\}$ 线性相关, 则从 $A^{\tilde{i}}B$ 第三列开始搜索. 重复以上步骤继续进行搜索, 直到第 $r$ 列, 并有 $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r = n$ 为止. 这样, 按此方法搜索到了 $Q_c$ 中的 $n$ 个线性无关的列向量 $\{b_1, Ab_1, \cdots, A^{\mu_1-1}b_1, \cdots, b_r, Ab_r, \cdots, A^{\mu_r-1}b_r\}$.

为了找出 $Q_o$ 的 $n$ 个线性无关的行，通常采用下面按行搜索方法．对于给定的 $(A, C)$, 记 $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_q \end{pmatrix}$, 按行搜索 $Q_0 = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ 的 $n$ 个线性无关的行．首先选定 $c_1$, 按行的方向进行搜索. 如果 $c_1A$ 和 $c_1$ 线性无关, 记为 $\{c_1, c_1A\}^T$, 如此对第一行继续搜索下去, 直到发现向量 $c_1A^{\nu_1}$ 与前行各向量 $c_1, c_1A, \cdots, c_1A^{\nu_1-1}$ 线性相关为止．如果如上找到的线性无关的向量个数 $\nu_1 < n$, 则继续从第二行开始搜索，若 $c_2$ 与 $\{c_1, c_1A, \cdots, c_1A^{\nu_1-1}\}^T$ 线性无关，则记为 $\{c_1, c_1A, \cdots, c_1A^{\nu_1-1}, c_2\}^T$. 对于 $c_2$ 继续搜索，直到找到一个向量 $c_2A^{\nu_2}$ 与 $\{c_1, c_1A, \cdots, c_1A^{\nu_1-1}, c_2, c_2A, \cdots, c_2A^{\nu_2-1}\}^T$ 线性相关为止．若 $c_2$ 与 $\{c_1, c_1A, \cdots, c_1A^{\nu_1-1}\}^T$ 线性相关，则从第三行开始搜索．重复以上步骤继续进行搜索，直到第 $m$ 行，并有 $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m = n$ 为止．这样，按此方法搜索到了 $Q_o$ 中的 $n$ 个线性无关的行向量为 $\{c_1, c_1A, \cdots, c_1A^{\nu_1-1}, \cdots, c_m, c_mA, \cdots, c_mA^{\nu_m-1}\}^T$.

1.Wonham **能控规范形**

考虑完全能控的多输入 - 多输出线性定常系统 (3.2.9),$rankQ_c = n$, 按上述列搜索法可以在 $Q_c$ 中找到 $n$ 个线性无关的列向量

$$\{b_1,\ Ab_1,\ \cdots,\ A^{\mu_1-1}b_1,\ \cdots,\ b_r, Ab_r,\ \cdots,\ A^{\mu_r-1}b_r\}$$

其中 $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = n$. 在上述搜索过程中，已知 $A^{\mu_1}b_1$ 可以表示为 $\{b_1,\ Ab_1,\ \cdots,\ A^{\mu_1-1}b_1\}$ 的线性组合， $A^{\mu_2}b_2$ 可以表示为 $\{b_1, Ab_1, \cdots, A^{\mu_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \cdots, A^{\mu_2-1}b_2\}$ 的线性组合．如此递推可知， $A^{\mu_r}b_r$ 可以表示为 $\{b_1,\ Ab_1,\ \cdots,\ A^{\mu_1-1}b_1, \cdots, b_r,\ Ab_r,\ \cdots,\ A^{\mu_r-1}b_r\}$ 的线性组合．于是

这样，在如下的变换矩阵

$$A^{\mu_1}b_1 = \sum_{j=1}^{\mu_1}\alpha_{1j}A^{j-1}b_1$$

$$\begin{cases} e_{11} & = & A^{\mu_1-1}b_1-\sum\limits_{j=2}^{\mu_1}\alpha_{1j}A^{j-2}b_1 \\ e_{12} & = & A^{\mu_1-2}b_1-\sum\limits_{j=3}^{\mu_1}\alpha_{1j}A^{j-3}b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{1\mu_1} & = & b_1 \end{cases}$$

$$A^{\mu_2}b_2 = \sum_{j=1}^{\mu_2}\alpha_{2j}A^{j-1}b_2+\sum_{j=1}^{\mu_1}\nu_{2j1}e_{1j}$$

$$\begin{cases} e_{21} & = & A^{\mu_2-1}b_2-\sum\limits_{j=2}^{\mu_2}\alpha_{2j}A^{j-2}b_2 \\ e_{22} & = & A^{\mu_2-2}b_2-\sum\limits_{j=3}^{\mu_2}\alpha_{2j}A^{j-3}b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{2\mu_2} & = & b_2 \end{cases}$$

$$A^{\mu_3}b_3 = \sum_{j=1}^{\mu_3}\alpha_{3j}A^{j-1}b_3+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{\mu_k}\nu_{3jk}e_{kj}$$

$$\begin{cases} e_{31} & = & A^{\mu_3-1}b_3-\sum\limits_{j=2}^{\mu_3}\alpha_{3j}A^{j-2}b_3 \\ e_{32} & = & A^{\mu_3-2}b_3-\sum\limits_{j=3}^{\mu_3}\alpha_{3j}A^{j-3}b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{3\mu_2} & = & b_3 \end{cases}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$A^{\mu_r}b_r = \sum_{j=1}^{\mu_r}\alpha_{rj}A^{j-1}b_r+\sum_{k=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{\mu_k}\nu_{ijk}e_{kj}$$

$$\begin{cases} e_{r1} & = & A^{\mu_r-1}b_1-\sum\limits_{j=2}^{\mu_r}\alpha_{rj}A^{j-2}b_r \\ e_{r2} & = & A^{\mu_r-1}b_r-\sum\limits_{j=3}^{\mu_r}\alpha_{rj}A^{j-3}b_r \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{r\mu_r} & = & b_r \end{cases}$$

这样，在如下的变换矩阵

$$T=(e_{11},\ e_{12},\ \cdots,\ e_{1\mu_1},\ \cdots,\ e_{r1},\ e_{r2}\ \cdots,\ e_{r\mu_r})$$

作用下，可以把完全能控的多输入 - 多输出线性定常矩阵 (3.2.9) 化为 Wonham 能控规范形.

**定理** 3.2.4 对于完全能控的多输入 - 多输出线性定常系统 (3.2.9), 经如下非奇异线性变换 $\bar{x}(t) = T^{-1}x(t)$, 可以将系统化为 Wonham 能控规范形

$$\Sigma_c : \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) & = & \bar{A}_c\bar{x}(t) + \bar{B}_c u(t) \\ y(t) & = & \bar{C}_c\bar{x}(t) \end{cases} \tag{3.2.10}$$

其中

$$\begin{aligned}
\bar{A}_c &= T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \cdots & \bar{A}_{1r} \\ & \bar{A}_{22} & \cdots & \bar{A}_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \bar{A}_{rr} \end{pmatrix}_{n\times n} \\
\bar{A}_{ii} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{i\mu_i} \end{pmatrix}_{\mu_i\times\mu_i} \qquad i = 1, 2, \cdots, r \\
\bar{A}_{ij} &= \begin{pmatrix} \nu_{j1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \nu_{j2i} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \\ \nu_{j\mu_i i} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{\mu_i\times\mu_j} \qquad j = i+1, \cdots, r \\
\bar{B}_c &= T^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & & & \beta_{1,(m+1)} & \cdots & \beta_{1,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & & & \vdots & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & \vdots & & \vdots \\ & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \beta_{n,(m+1)} & \cdots & \beta_{n,p} \end{pmatrix} \\
\bar{C}_c &= CT \ (\text{无特殊形式})
\end{aligned}$$

□

**例** 3.2.2 求如下系统的 Wonham 能控规范形.

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\1&0&3\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}u(t)$$

**解**：由已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\1&0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$, 所以系统的能控性判别矩阵为

$$Q_c=\Big(B,\quad AB,\quad A^2B\Big)=\begin{pmatrix}1&0&1&2&0&4\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&4&2\end{pmatrix},$$

显然 $\mathrm{rank}Q_c=3$, 因此系统是完全能控的.

对 $Q_c$ 按列搜索可知 3 个线性无关列为 $\{b_1,Ab_1,b_2\}$, 即 $\mu_1=2,\mu_2=1$, 所以令 $A^2b_1=\alpha_{11}b_1+\alpha_{12}Ab_2$. 由于

$$b_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad Ab_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad A^2b_1=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}=\alpha_{11}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_{12}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

解得 $\alpha_{11}=-4,\ \alpha_{12}=4$, 所以

$$e_{11}=Ab_1-\alpha_{12}b_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix},\ e_{12}=b_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ e_{21}=b_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

再由 $Ab_2=\alpha_{21}b_2+\nu_{211}e_{11}+\nu_{221}e_{12}$, 即

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\alpha_{21}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\nu_{211}\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}+\nu_{221}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

所以 $\alpha_{21}=1,\ \nu_{211}=0,\ \nu_{221}=2$. 由此可得

$$\begin{aligned}\bar{A}_c &= T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ 0 & \bar{A}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & \nu_{211}\\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \nu_{221}\\ 0 & 0 & \alpha_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ \bar{B}_c &= T^{-1}B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中 $T=(e_{11},e_{12},e_{21})=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. 因此系统的 Wonham 能控规范形为

$$\dot{\bar{x}}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\bar{x}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}u.$$

□

2. Wonham **能观测规范形**

考虑完全能观测的多输入 - 多输出线性定常系统 (3.2.9), $rankQ_o=n$, 按上述行搜索法，可以在 $Q_o$ 中找到 $n$ 个线性无关的行向量

$$\{c_1,\ c_1A,\ \cdots,\ c_1A^{\nu_1-1},\ \cdots,\ c_m, c_mA,\ \cdots,\ c_mA^{\nu_m-1}\}^T$$

其中 $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m=n$. 在上述搜索过程中，已知 $c_1A^{\nu_1}$ 可以表示为 $\{c_1,\ c_1A,\ \cdots,\ c_1A^{\nu_1-1}\}^T$ 的线性组合，$c_2A^{\nu_2}$ 可以表示为 $\{c_1,\ c_1A,\ \cdots,\ c_1A^{\nu_1-1}, c_2,\ c_2A,\ \cdots,\ c_2A^{\nu_2-1}\}^T$ 的线性组合. 如此递推可知， $c_mA^{\nu_m}$ 可以表示为 $\{c_1,\ c_1A,\ \cdots,\ c_1A^{\nu_1-1}, c_2,\ c_2A,\ \cdots,\ c_2A^{\nu_2-1},\cdots, c_m,\ c_mA,\ \cdots,\ c_mA^{\nu_m-1}\}^T$ 的线性组合. 于是

$$c_1A^{\nu_1} = \sum_{j=1}^{\nu_1}\beta_{j1}c_1A^{j-1}$$

$$\begin{cases}\bar{e}_{11} &= c_1A^{\nu_1-1}-\sum\limits_{j=2}^{\nu_1}\beta_{j1}c_1A^{j-2}\\ \bar{e}_{21} &= c_1A^{\nu_1-2}-\sum\limits_{j=3}^{\nu_1}\beta_{j1}c_1A^{j-3}\\ \cdots & \cdots\ \cdots\\ \bar{e}_{\nu_1 1} &= c_1\end{cases}$$

$$c_2A^{\nu_2} = \sum_{j=1}^{\nu_2}\beta_{j2}c_2A^{j-1} + \sum_{j=1}^{\nu_2}\rho_{1j2}e_{j1}$$

$$\begin{cases} \bar{e}_{12} & = & c_2A^{\nu_2-1} - \sum\limits_{j=2}^{\nu_2}\beta_{j2}c_2A^{j-2} \\ \bar{e}_{22} & = & c_2A^{\nu_2-2} - \sum\limits_{j=3}^{\nu_2}\beta_{j2}c_2A^{j-3} \\ \cdots & \cdots & \\ \bar{e}_{\nu_2 2} & = & c_2 \end{cases}$$

$$c_3A^{\nu_3} = \sum_{j=1}^{\nu_3}\beta_{j3}c_3A^{j-1} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{\nu_3}\rho_{kj3}e_{jk}$$

$$\begin{cases} \bar{e}_{13} & = & c_3A^{\nu_3-1} - \sum\limits_{j=2}^{\nu_3}\beta_{j3}c_3A^{j-2} \\ \bar{e}_{23} & = & c_3A^{\nu_3-2} - \sum\limits_{j=3}^{\nu_3}\beta_{j3}c_3A^{j-3} \\ \cdots & \cdots & \\ \bar{e}_{\nu_2 3} & = & c_3 \end{cases}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$c_mA^{\nu_m} = \sum_{j=1}^{\nu_m}\beta_{jm}c_mA^{j-1} + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{\nu_k}\rho_{kjm}e_{kj}$$

$$\begin{cases} \bar{e}_{1m} & = & c_mA^{\nu_m-1} - \sum\limits_{j=2}^{\nu_m}\beta_{jm}c_mA^{j-2} \\ \bar{e}_{2m} & = & c_mA^{\nu_m-2} - \sum\limits_{j=3}^{\nu_m}\beta_{jm}c_mA^{j-3} \\ \cdots & \cdots & \\ \bar{e}_{\nu_m m} & = & c_m \end{cases}$$

这样，在如下的变换矩阵

$$\bar{T} = (\bar{e}_{11}, \bar{e}_{21}, \cdots, \bar{e}_{\nu_1 1}, \cdots, \bar{e}_{1m}, \bar{e}_{2m}, \cdots, \bar{e}_{\nu_m m})^T$$

作用下，可以把完全能观测的多输入 - 多输出线性定常系统 (3.2.9) 化为 Wonham 能观测规范形.

**定理** 3.2.5 对于完全能观测的多输入 - 多输出线性定常系统 (3.2.9)，经如下非奇异线性变换 $\hat{x}(t) = \dot{T}x(t)$，可以将系统化为 Wonham 能观测规范形

$$\Sigma_0 : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) & = & \bar{A}_0\hat{x}(t) + \bar{B}_0u(t) \\ y(t) & = & \bar{C}_0\hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.2.11}$$

其中

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_0 &= \bar{T}A\bar{T}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix}_{n\times n} \\
A_{ii} &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \beta_{i1} \\ 1 & \cdots & 0 & \beta_{i2} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & \beta_{i\nu_i} \end{pmatrix}_{\nu_i\times\nu_i} \qquad i = 1, 2, \cdots, m \\
A_{ij} &= \begin{pmatrix} \rho_{i1j} & \cdots & \rho_{i\nu_j j} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{\nu_i\times\nu_j} \qquad j = 1, 2, \cdots, i-1 \\
\bar{B}_0 &= \bar{T}B \quad (\text{无特殊形式})
\end{aligned}
$$

$$
\bar{C}_0 = C\bar{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 & \cdots & 1 \\ \beta_{(l+1),1} & & \cdots & & \cdots & & & & \beta_{(l+1),n} \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \beta_{p,1} & & \cdots & & \cdots & & & & \beta_{p,n} \end{pmatrix}
$$

□

### § 3.2.3 **多输入 - 多输出线性定常系统的** Luenberger **规范形**

下面，我们给出多输入 - 多输出线性定常系统的 Luenberger 能控规范形和 Luenberger 能观测规范形.

1. Luenberger **能控规范形**

考虑完全能控的多输入 - 多输出线性定常系统 (3.2.9),$rankQ_c = n, rankB = r$, 按列搜索法可以在 $Q_c$ 中找到 $n$ 个线性无关的列，并记

$$P^{-1} = (\ b_1,\ Ab_1,\ \cdots,\ A^{\mu_1-1}b_1,\ \cdots,\ b_r,\ Ab_r,\ \cdots,\ A^{\mu_r-1}b_r\ )$$

令 $P=\begin{pmatrix} e_{11}^T \\ \vdots \\ e_{1\mu_1}^T \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ e_{r1}^T \\ \vdots \\ e_{r\mu_r}^T \end{pmatrix}$ 并取 $P$ 的每块阵的末行 $e_{1\mu_1}^T, e_{2\mu_2}^T, \cdots, e_{r\mu_r}^T$ 来构成变换矩阵 $T=\begin{pmatrix} e_{1\mu_1}^T \\ e_{1\mu_1}^T A \\ \vdots \\ e_{1\mu_1}^T A^{\mu_1-1} \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ e_{r\mu_r}^T \\ e_{r\mu_r}^T A \\ \vdots \\ e_{r\mu_r}^T A^{\mu_1-1} \end{pmatrix}$

则通过这样的非奇异变换可以将多输入 - 多输出线性定常系统 (3.2.9) 化为 Luenberger 能控规范形.

**定理** 3.2.6 对于完全能控的多输入 - 多输出线性定常系统 (3.2.9), 经如下非奇异线性变换 $\bar{x}(t)=Tx(t)$, 可以将系统化为 Luenberger 能控规范形

$$\Sigma_c:\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}_c\bar{x}(t)+\bar{B}_c u(t) \\ y(t) &= \bar{C}_c\bar{x}(t) \end{cases} \tag{3.2.12}$$

其中

$$\begin{aligned}
\bar{A}_c &= TAT^{-1}=\begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \cdots & \bar{A}_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{A}_{r1} & \cdots & \bar{A}_{rr} \end{pmatrix}_{n\times n} \\
\bar{A}_{ii} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}_{\mu_i\times\mu_i} \qquad i=1,2,\cdots,r \\
\bar{A}_{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}_{\mu_i\times\mu_j} \qquad i,j=1,2,\cdots,r,\ i\neq j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{B}_C &= TB = \begin{pmatrix} 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ 1 & * & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \\ & & \vdots \\ & & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}_{n\times p} \\ \bar{C}_c &= CT^{-1} \text{ 无特殊形式}\end{aligned}$$

□

**例** 3.2.3 求如下系统的 Luenberger 能控规范形.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t)$$

**解**：由已知系统的能控性判别矩阵为

$$Q_c = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -10 & -10 & -30 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 13 & 13 & 51 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

显然 $\mathrm{rank}Q_c = 4$, 所以系统是完全能控的.

对 $Q_c$ 按列搜索可知 $Q_c$ 的 4 线性无关列为 $\{b_1, b_2, Ab_2, A^2b_2\}$, 所以 $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$. 记

$$P^{-1} = (b_1, b_2, Ab_2, A^2b_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

则

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0&-2\\-1&0&1&3\\-3&0&0&-4\\1&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_{11}^T\\e_{21}^T\\e_{22}^T\\e_{23}^T\end{pmatrix}$$

取 $P$ 的第一行 $e_{11}^T$ 及第四行 $e_{23}^T$ 构造如下变换矩阵

$$T=\begin{pmatrix}e_{11}^T\\e_{23}^T\\e_{23}^TA\\e_{23}^TA^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&-2\\1&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ T^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&2&-3&0\\0&0&0&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}$$

由此可求出系统的 Luenberger 能控规范形为

$$\dot{\bar{x}}(t)=A_c\overline{\bar{x}(t)+B}_cu(t)$$

其中

$$\bar{A}_c=TAT^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&-3&4\end{pmatrix},\ \bar{B}_c=TB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

□

2. Luenberger **能观测规范形**

考虑完全能观测的多输入 - 多输出线性定常系统 (3.2.9), $rankQ_o=n,rankC=m$, 按行搜索

法，可以在 $Q_o$ 中找到 $n$ 个线性无关的行，并记 $P = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 A \\ \vdots \\ c_1 A^{\nu_1 - 1} \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ c_m \\ c_m A \\ \vdots \\ c_m A^{\nu_m - 1} \end{pmatrix}$

令 $P^{-1} = \begin{pmatrix} e_{11}, & \cdots, & e_{\nu_1 1}, & \cdots, & e_{1m}, & \cdots, & e_{\nu_m m} \end{pmatrix}$ 并取 $P^{-1}$ 的每块阵中的最后一列 $e_{\nu_1 1}, e_{\nu_2 2}, \cdots, e_{\nu_m m}$ 来构成变换矩阵

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} e_{\nu_1 1}, & e_{\nu_1 1} A, & \cdots, & e_{\nu_1 1} A^{\nu_1 - 1}, & \cdots, & e_{\nu_m m}, & e_{\nu_m m} A, & \cdots, & e_{\nu_m m} A^{\nu_m - 1} \end{pmatrix}$$

通过这样的非奇异变换可以将多输入 - 多输出线性定常系统 (3.2.9) 化为 Luenberger 能观测规范形.

**定理** 3.2.7 对于完全能观测的多输入 - 多输出线性定常系统 (3.2.9), 经如下的非奇异线性变换 $\hat{x} = \bar{T}x$, 可以将系统化为 Luenberger 能观测规范形

$$\Sigma_0 : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= \bar{A}_0 \hat{x}(t) + \bar{B}_0 u(t) \\ y(t) &= \bar{C}_0 \hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.2.13}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= \bar{T} A \bar{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \cdots & \bar{A}_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{A}_{m1} & \cdots & \bar{A}_{mm} \end{pmatrix}_{n \times n} \\ \bar{A}_{ii} &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ 1 & \cdots & 0 & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & * \end{pmatrix}_{\nu_i \times \nu_i} \qquad i = 1, 2, \cdots, m \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}_{\nu_i \times \nu_j} \qquad i,j=1,2,\cdots,m,\ i\neq j \\
\bar{C}_0 &= C\bar{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & \\ & & * & & \ddots & & & \\ & & * & & & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{q\times n} \\
\bar{B}_0 &= \bar{T}B \ \text{无特殊形式}
\end{aligned}
$$

□

## §3.3 线性系统的结构分解

现在我们讨论不完全能控和不完全能观测的系统. 对于这类系统，研究的主要问题是如何对系统进行能控性分解、能观测性分解或者是同时按能控能观测性进行分解. 通过分解，可以把系统的结构化分为能控的部分和不能控的部分、能观测的部分和不能观测的部分，或者同时将系统化为能控且能观测、能控不能观测、不能控能观测以及不能控不能观测四个部分. 研究系统结构的分解，不仅使我们更深刻地了解系统的结构特征，而且也可以使我们更深入地揭示状态空间描述与输入 - 输出描述之间的本质差别.

### § 3.3.1 在非奇异线性变换下的系统的能控性与能观测性

由于对系统进行分解是通过引入非奇异线性变换实现的，因此，我们需要先研究在非奇异线性变换下，系统的能控性与能观测性的变化情况.

**定理** 3.3.1 代数等价的线性定常系统具有相同的能控性和能观测性.

**证明:** 设 $\{A,B,C\}$ 与 $\{\bar{A},\bar{B},\bar{C}\}$ 为代数等价的线性定常系统，则存在非奇异数值矩阵 $T$, 使得

$$\bar{A}=TAT^{-1},\ \bar{B}=TB,\ \bar{C}=CT^{-1}.$$

设 $Q_c,\bar{Q}_c$ 与 $Q_o,\bar{Q}_o$ 分别为两个系统的能控性判别矩阵和能观测性判别矩阵，我们将证明

$$rank\bar{Q}_c=rankQ_c,\ rank\bar{Q}_o=rankQ_o.$$

由于

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_c &= \left( \bar{B} \ \vdots \ \bar{A}\bar{B} \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ \bar{A}^{n-1}\bar{B} \right) \\
&= \left( TB \ \vdots \ TAT^{-1}TB \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ TA^{n-1}T^{-1}TB \right) \\
&= \left( TB \ \vdots \ TAB \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ TA^{n-1}B \right) \\
&= T\left( B \ \vdots \ AB \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ A^{n-1}B \right) = TQ_c \\
\bar{Q}_o &= \left( \bar{C}^T \ \vdots \ \bar{A}^T\bar{C}^T \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ (\bar{A}^T)^{n-1}\bar{C}^T \right) \\
&= \left( (T^{-1})^TC^T \ \vdots \ (T^{-1})^TA^TT^T(T^{-1})^TC^T \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ (T^{-1})^T(A^{n-1})^TT^T(T^{-1})^TC^T \right) \\
&= \left( (T^T)^{-1}C^T \ \vdots \ (T^T)^{-1}A^TC^T \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ (T^T)^{-1}(A^T)^{n-1}C^T \right) = (T^T)^{-1}Q_o
\end{aligned}$$

再注意到 $rankT = n$, 而 $rankQ_c \leq n, rankQ_o \leq n$, 于是

$$\begin{aligned}
rank\bar{Q}_c &\leq \min\{rankT,\ rankQ_c\} &= rankQ_c \\
rank\bar{Q}_o &\leq \min\{rank(T^T)^{-1},\ rankQ_o\} &= rankQ_o
\end{aligned}$$

另一方面 $Q_c = T^{-1}\bar{Q}_c,\ Q_o = T^T\bar{Q}_o$, 所以

$$\begin{aligned}
rankQ_c &\leq \min\{rankT^{-1},\ rank\bar{Q}_c\} &= rank\bar{Q}_c \\
rankQ_o &\leq \min\{rankT^T\ rank\bar{Q}_o\} &= rankQ_o
\end{aligned}$$

因此

$$rank\bar{Q}_c = rankQ_c,\ \ rank\bar{Q}_o = rankQ_o.$$

□

**定理** 3.3.2 对线性时变系统

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t), \end{cases} \quad t \in J,$$

作可微非奇异变换 $\hat{x}(t) = R^{-1}(t)x(t)$, 其中 $R(t)$ 的元是对 $t$ 的绝对连续函数，且 $R(t)$ 对一切 $t \in [t_0, t_1]$ 均不降秩， $t_0, t_1 \in J,\ t_1 > t_0$. 则系统的 Gram 矩阵在变换后的秩不变，即成立

$$rank\hat{W}_c[t_0, t_1] = rankW_c[t_0, t_1],\ rank\hat{W}_0[t_0, t_1] = rankW_0[t_0, t_1].$$

**证明**：设系统 $\Sigma$ 经可微非奇异变换 $\hat{x}(t) = R^{-1}(t)x(t)$ 后，所得系统 $\hat{\Sigma}$ 为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t)\hat{x}(t) + \hat{B}(t)u(t), \\ y(t) = \hat{C}(t)\hat{x}(t), \end{cases}$$

那么

$$\begin{cases} \hat{A}(t) &=& R^{-1}(t)A(t)R(t) + \dot{R}^{-1}(t)R(t) \\ \hat{B}(t) &=& R^{-1}(t)B(t) \\ \hat{C}(t) &=& C(t)R(t) \end{cases}$$

将系统的状态运动的表达式代入 $\hat{x}(t) = R^{-1}(t)x(t)$ 两边可得

$$\begin{aligned} & \hat{\Phi}(t,t_0)\hat{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \hat{\Phi}(t,\tau)\hat{B}(\tau)u(\tau)d\tau \\ =\ & R^{-1}(t)[\Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau] \\ =\ & R^{-1}(t)\Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R^{-1}(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ =\ & R^{-1}(t)\Phi(t,t_0)R(t_0)\hat{x}_0 + \int_{t_0}^{t} R^{-1}(t)\Phi(t,\tau)R(\tau)\hat{B}(\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

因此

$$\hat{\Phi}(t,\tau) = R^{-1}(t)\Phi(t,\tau)R(\tau).$$

于是

$$\begin{aligned} \hat{W}_c[t_0,t_1] &= \int_{t_0}^{t_1} \hat{\Phi}(t_0,\tau)\hat{B}(\tau)\hat{B}^T(\tau)\hat{\Phi}^T(t_0,\tau)d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} R^{-1}(t_0)\Phi(t_0,\tau)R(\tau)R^{-1}(\tau)B(\tau)B^T(\tau)[R^{-1}(\tau)]^T R^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)[R^{-1}(t_0)]^T d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} R^{-1}(t_0)\Phi(t_0,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)[R^{-1}(t_0)]^T d\tau \\ &= R^{-1}(t_0)W_c[t_0,t_1][R^{-1}(t_0)]^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{W}_0[t_0,t_1] &= \int_{t_0}^{t_1} \hat{\Phi}^T(\tau,t_0)\hat{C}^T(\tau)\hat{C}(\tau)\hat{\Phi}^T(\tau,t_0)d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [R(t_0)]^T\Phi^T(\tau,t_0)[R^{-1}(\tau)]^T R^T(\tau)C^T(\tau)C(\tau)R(\tau)R^{-1}(\tau)\Phi(\tau,t_0)R(t_0)d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} R^T(t_0)\Phi^T(\tau,t_0)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t_0)R(t_0)d\tau \\ &= R^{-1}(t_0)W_0[t_0,t_1]R(t_0) \end{aligned}$$

由于 $rankR(t_0) = n$, $rankW_c[t_0,t_1] \le n$, $rankW_0[t_0,t_1] \le n$ 故

$$rank\hat{W}_c[t_0,t_1] \le rankW_c[t_0,t_1],\ \ rank\hat{W}_o[t_0,t_1] \le rankW_o[t_0,t_1].$$

另一方面, $\hat{x}(t) = R^{-1}(t)x(t)$ 是可微非奇异变换 $x(t) = R(t)\hat{x}(t)$, 于是

$$\begin{aligned} W_c[t_0,t_1] &= R(t_0)\hat{W}_c[t_0,t_1]R^T(t_0), \\ W_o[t_0,t_1] &= [R^T(t_0)]^{-1}\hat{W}_o[t_0,t_1]R^{-1}(t_0). \end{aligned}$$

因此

$$rankW_c[t_0,t_1] \le rank\hat{W}_c[t_0,t_1],\ \ rankW_o[t_0,t_1] \le rank\hat{W}_o[t_0,t_1],$$

从而定理得证.

□

由定理 3.3.1 和定理 3.3.2 可见，对线性系统作非奇异线性变换，即不改变系统的能控性，也不改变系统的能观测性，而且也不改变系统的不完全能控性和不完全能观测性的程度．正是因为这一点，提供了利用非奇异线性变换对系统实现结构分解的可能性.

### § 3.3.2 线性定常系统按能控性的结构分解

考虑不完全能控的多输入 - 多输出线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{3.3.1}$$

其中 $x(t)\in R^n$，$rankQ_c=k<n$. 在能控判别矩阵

$$Q_c = \begin{pmatrix} B & \vdots & AB & \vdots & \cdots & \vdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

中任意选取 $k$ 个线性无关的列，记为 $q_1,q_2,\cdots,q_k$. 再在 $n$ 维实向量空间中任意选取 $n-k$ 个列向量，记为 $q_{k+1},\cdots,q_n$, 使它们与 $\{q_1,q_2,\cdots,q_k\}$ 线性无关．这样，可以组成一个非奇异变换矩阵

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} q_1, & \cdots, & q_k, & q_{k+1}, & \cdots, & q_n \end{pmatrix}$$

利用这个变换矩阵可以对系统结构按能控性进行分解.

**定理** 3.3.3 对于不完全能控的多输入 - 多输出线性定常系统 (3.3.1), 引入线性非奇异变换 $\bar{x}(t)=Px(t)$, 则可以给出系统结构按能控性分解的规范表达式

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_c(t) \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_c(t) \\ \bar{x}_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_c(t) \\ \bar{x}_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.3.2}$$

其中 $\dot{\bar{x}}_c(t)$ 为 $k$ 维能控分状态向量， $\bar{x}_{\bar{c}}(t)$ 为 $n-k$ 维不能控分状态向量， $k=rankQ_c$.

**证明**：设 $P = Q^{-1} = \begin{pmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{pmatrix}$ 则由 $PP^{-1} = I$ 可得 $p_i^T q_j = 0, \forall i \neq j$. 进而又知，对于 $j \leq k$, $Aq_j$ 是 $\{q_1, q_2, \cdots, q_k\}$ 的线性组合. 所以有

$$p_i^T A q_j = 0,\ i = k+1, \cdots, n,\ j = 1, 2, \cdots, k$$

从而

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} p_1^T A q_1 & \cdots & p_1^T A q_k & p_1^T A q_{k+1} & \cdots & p_1^T A q_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_k^T A q_1 & \cdots & p_k^T A q_k & p_k^T A q_{k+1} & \cdots & p_k^T A q_n \\ p_{k+1}^T A q_1 & \cdots & p_{k+1}^T A q_k & p_{k+1}^T A q_{k+1} & \cdots & p_{k+1}^T A q_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_n^T A q_1 & \cdots & p_n^T A q_k & p_n^T A q_{k+1} & \cdots & p_n^T A q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{pmatrix}$$

同样， $B$ 的所有列也均可表示为 $\{q_1, q_2, \cdots, q_k\}$ 的线性组合. 因而可得

$$\bar{B} = PB = \begin{pmatrix} p_1^T B \\ \vdots \\ p_k^T B \\ \cdots \\ p_{k+1}^T B \\ \vdots \\ p_n^T B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

而 $\bar{C}$ 无特殊形式，为

$$\bar{C} = CP^{-1} = (\ Cq_1,\ \cdots,\ Cq_k \ \vdots\ Cq_{k+1},\ \cdots,\ Cq_n) = (\ \bar{C}_c,\ \bar{C}_{\bar{c}}\ )$$

这样，就得到了规范表达式 (3.3.2).

由于

$$\begin{aligned} k &= rankQ_c = rank\bar{Q}_c = rank(\ \bar{B},\ \ \bar{A}\bar{B},\ \ \cdots,\ \ \bar{A}^{n-1}\bar{B}\ ) \\ &= rank \begin{pmatrix} \bar{B}_c, & \bar{A}_c\bar{B}_c, & \cdots, & \bar{A}_c^{n-1}\bar{B}_c \\ 0, & 0, & \cdots, & 0 \end{pmatrix} \\ &= rank(\ \bar{B}_c,\ \ \bar{A}_c\bar{B}_c,\ \ \cdots,\ \ \bar{A}_c^{n-1}\bar{B}_c\ ) \end{aligned}$$

又因为 $\bar{A}_c$ 为 $k\times k$ 数值矩阵，由 Cayley-Hamilton 定理可知 $\bar{A}_c^k\bar{B}_c,\cdots,\bar{A}_c^{n-1}\bar{B}_c$ 均可表示为 $\{\bar{B}_c,\bar{A}_c\bar{B}_c,\cdots,\bar{A}_c^{k-1}\bar{B}_c\}$ 的线性组合．因此

$$rank(\bar{B}_c,\quad \bar{A}_c\bar{B}_c,\quad \cdots,\quad \bar{A}_c^{k-1}\bar{B}_c)=k$$

这表明 $(A_c,\overline{\ \ }B_c)$ 为能控的，即 $\bar{x}_c$ 为能控分状态．定理证毕.

□

**推论** 3.3.1 在 (3.3.2) 的分解规范表达式中，系统被分解为能控部分和不能控部分．其中，能控部分为如下的 $k$ 维子系统

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{\bar{x}}_c(t) & = & \bar{A}_c\bar{x}_c(t)+\bar{A}_{12}\bar{x}_{\bar{c}}(t)+\bar{B}_cu(t)\\ y_1(t) & = & \bar{C}_c\bar{x}_c(t)\end{array}\right. \tag{3.3.3}$$

不能控部分为如下的 $n-k$ 维子系统

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{\bar{x}}_{\bar{c}}(t) & = & \bar{A}_{\bar{c}}\bar{x}_{\bar{c}}(t)\\ y_2(t) & = & \bar{C}_c\bar{x}_{\bar{c}}(t)\end{array}\right. \tag{3.3.4}$$

并且 $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$.

□

**例** 3.3.1 给出如下线性定常系统的能控性分解.

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}u(t),\quad y(t)=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}x(t)$$

**解**：由已知系统的能控性判别矩阵为

$$Q_c=(B,AB,A^2B)=\begin{pmatrix}0&1&1&1&2&1\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&2&1\end{pmatrix}$$

显然 $rankQ_c=2<3=n$, 所以系统状态是不完全能控的，且按能控性结构分解之后能控状态 $\bar{x}_c$ 是二维的．由定理 3.3.3 选取非奇异变换阵 $P$ 使得

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

其中 $P^{-1}$ 的第一列和第二列分别为 $Q_c$ 的第一列和第二列，它们线性无关， $P^{-1}$ 的第三列为任意选取的使得 $P^{-1}$ 非奇异的列向量．显然 $rankP^{-1}=3=n$, 所以 $P^{-1}$ 非奇异且 $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$．

对原系统进行非奇异变换 $\bar{x}(t)=Px(t)$, 通过计算得到

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= PAP^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
\bar{B} &= PB=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\\
\bar{C} &= CP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

所以系统按能控性分解后的状态空间描述为

$$\begin{pmatrix}\dot{\bar{x}}_c(t)\\\dot{\bar{x}}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}_c(t)\\\bar{x}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}u(t),\quad y(t)=\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}_c(t)\\\bar{x}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}$$

系统的低维能控子系统为

$$\dot{\bar{x}}_c(t)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\bar{x}_c(t)+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}u(t),\quad y(t)=\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\bar{x}_c(t)$$

□

### § 3.3.3 线性定常系统按能观测性的结构分解

考虑不完全能观测的多输入 - 多输出线性定常系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t)\\ y(t) = Cx(t)\end{cases}\tag{3.3.5}$$

其中， $x(t)\in R^n, rankQ_o=m<n$. 在能观测判别矩阵 $Q_o=\begin{pmatrix}C\\CA\\\vdots\\CA^{n-1}\end{pmatrix}$ 中任意地选取 $m$ 个线

性无关的行，记为 $h_1, h_2, \cdots, h_m$. 再在 $n$ 维实向量空间中任意选取 $n-m$ 个行向量 $h_{m+1}, \cdots, h_n$ 使它们与 $\{\ h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_m\ \}$ 线性无关. 这样，可以组成一个非奇异变换矩阵 $P = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \\ h_{m+1} \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ 利用这个变换矩阵，可以对系统的结构按能观测性进行分解.

**定理** 3.3.4 对于不完全能观测的多输入 - 多输出线性定常系统 (3.3.5), 引入线性非奇异变换 $\hat{x} = Px$, 则可以给出系统结构按能观测性分解的规范表达式

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_o(t) \\ \dot{\hat{x}}_{\bar{o}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_o & 0 \\ \hat{A}_{12} & \hat{A}_{\bar{o}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_o(t) \\ \hat{x}_{\bar{o}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{B}_o \\ \hat{B}_{\bar{o}} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} \hat{C}_o & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_o(t) \\ \hat{x}_{\bar{o}}(t) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.3.6}$$

其中， $\hat{x}_o(t)$ 为 $m$ 维能观测分状态， $\hat{x}_{\bar{o}}(t)$ 为 $n-m$ 维不能观测分状态 $m = rankQ_o$.

□

**推论** 3.3.2 在 (3.3.6) 的分解规范表达式中，系统被分解为能观测部分和不能观测部分. 其中，能观测部分是 $m$ 维子系统

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_o(t) = \hat{A}_o \hat{x}_o(t) + \hat{B}_o u(t) \\ y_1(t) = \hat{C}_o \hat{x}_o(t) \end{cases} \tag{3.3.7}$$

不能观测部分为 $n-m$ 维子系统

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_{\bar{o}}(t) = \hat{A}_{\bar{o}} \hat{x}_{\bar{o}}(t) + A_{21} \hat{x}_o(t) + \hat{B}_{\bar{o}} u(t) \\ y_2(t) = 0 \end{cases} \tag{3.3.8}$$

其中 $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.

□

**例** 3.3.2 给出如下线性定常系统的能观测性分解.

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} x(t).$$

**解**：计算系统的能观测性判别矩阵的秩

$$rankQ_o = rank\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} = 2 < n = 3$$

所以系统状态是不完全能观测的，且按能观测性结构分解后的能观测状态 $\bar{x}_o$ 为二维的. 由定理 3.3.4 选取非奇异变换矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中 $P$ 的第一行和第二行分别为能控性判别矩阵 $Q_o$ 的第一行和第二行，它们是线性无关的， $P$ 的第三行为任意选取的使得 $P$ 为非奇异的向量. 显然 $rankP = 3 = n$, 所以 $P$ 可逆并且

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对系统进行非奇异变换 $\bar{x} = Px$, 通过计算得到

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -11 \end{pmatrix} \\
\bar{B} &= PB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\bar{C} &= CP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

则系统按能观测性分解后的状态空间描述为

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_o(t) \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{o}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_o(t) \\ \bar{x}_{\bar{o}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_o(t) \\ \bar{x}_{\bar{o}}(t) \end{pmatrix}$$

系统的低维能观测子系统为

$$\dot{\bar{x}}_o(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \bar{x}_o(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}_o(t)$$

□

§ 3.3.4 **线性定常系统结构的** Kalman **分解**

考虑同时为不完全能控和不完全能观测的线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{3.3.9}$$

结合上述两节的结果，可以给出系统的结构同时按能控性和能观测性进行的 Kalman 分解的规范表达式.

由于系统 (3.3.9) 既是不完全能控的又是不完全能观测的，状态向量 $x \in R^n$，$rankQ_c = k < n$, $rankQ_o = m < n$, 并且 $k + m < n$. 首先对系统进行能控性分解，即引入状态变换 $x(t) = T_c^{-1} \begin{pmatrix} x_c(t) \\ x_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix}$，其中 $T_c^{-1}$ 是基于系统能控性矩阵来构造的. 继而对能控子系统进行能观测性分解，即引入状态变换 $x_c(t) = T_{o1}^{-1} \begin{pmatrix} x_{co}(t) \\ x_{c\bar{o}}(t) \end{pmatrix}$, 其中 $T_{o1}^{-1}$ 是基于能控子系统的能观测性矩阵来构造的. 最后，对不能控子系统进行能观测性分解，即引入状态变换 $x_{\bar{c}}(t) = T_{o2}^{-1} \begin{pmatrix} x_{\bar{c}o}(t) \\ x_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{pmatrix}$, 其中 $T_{o2}^{-1}$ 是基于不能控子系统的能观测性矩阵来构造的. 综合上面三次状态变换可以作如下状态变换

$$x(t) = T^{-1} \begin{pmatrix} x_{co}(t) \\ x_{c\bar{o}}(t) \\ x_{\bar{c}o}(t) \\ x_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_c^{-1}T_{o1}^{-1} & & & \\ & T_c^{-1}T_{o1}^{-1} & & \\ & & T_c^{-1}T_{o2}^{-1} & \\ & & & T_c^{-1}T_{o2}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{c0}(t) \\ x_{c\bar{o}}(t) \\ x_{\bar{c}o}(t) \\ x_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{pmatrix}$$

将对系统 (3.3.9) 的结构同时进行能控性和能观测性分解.

**定理** 3.3.5 对于不完全能控和不完全能观测的线性定常系统 (3.3.9), 引入线性非奇异变换 $\tilde{x}(t) =$

$Tx(t)$, 则可以给出系统结构同时按能控性和能观测性进行 Kalman 分解的规范表达式

$$\left\{\begin{array}{lcl} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_{co}(t) \\ \dot{\tilde{x}}_{c\bar{o}}(t) \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}o}(t) \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \tilde{A}_{co} & 0 & \tilde{A}_{13} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{c\tilde{o}} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{\tilde{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{\tilde{c}\tilde{o}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{co}(t) \\ \tilde{x}_{c\bar{o}}(t) \\ \tilde{x}_{\bar{c}o}(t) \\ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_{co} \\ \tilde{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{pmatrix} \tilde{C}_{co} & 0 & \tilde{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{co}(t) \\ \tilde{x}_{c\bar{o}}(t) \\ \tilde{x}_{\bar{c}o}(t) \\ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{pmatrix} \end{array}\right. \tag{3.3.10}$$

其中， $\tilde{x}_{co}(t)$ 为能控且能观测分状态向量， $\tilde{x}_{c\bar{o}}(t)$ 为能控但不能观测分状态向量， $\tilde{x}_{\bar{c}o}(t)$ 为不能控但能观测分状态向量， $\tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)$ 为不能控且不能观测分状态向量.

□

**推论** 3.3.3 在 (3.3.10) 的 Kalman 分解规范表达式中，系统被分解为能控能观测部分，能控且不能观测部分，不能控且能观测部分和不能控且不能观测部分. 其中能控且能观测子系统为

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{\tilde{x}}_{co}(t) & = & \tilde{A}_{11}\tilde{x}_{co}(t) + \tilde{A}_{13}\tilde{x}_{\bar{c}o}(t) + \tilde{B}_{co}u(t) \\ y_1(t) & = & \tilde{C}_{co}\tilde{x}_{co}(t) \end{array}\right.$$

能控且不能观测子系统为

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{\tilde{x}}_{c\bar{o}}(t) & = & \tilde{A}_{11}\tilde{x}_{co}(t) + \tilde{A}_{22}\tilde{x}_{c\bar{o}}(t) + \tilde{A}_{23}\tilde{x}_{\bar{c}o}(t) + \tilde{A}_{24}\tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t) + \tilde{B}_{c\bar{o}}u(t) \\ y_2(t) & = & 0 \end{array}\right.$$

不能控且能观测子系统为

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}o}(t) & = & \tilde{A}_{33}\tilde{x}_{\bar{c}o}(t) \\ y_3(t) & = & \tilde{C}_{\bar{c}o}\tilde{x}_{\bar{c}o}(t) \end{array}\right.$$

不能控且不能观测子系统为

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}\bar{o}}(t) & = & \tilde{A}_{43}\tilde{x}_{\bar{c}o}(t) + \tilde{A}_{\bar{c}\bar{o}}\tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t) \\ y_4(t) & = & 0 \end{array}\right.$$

其中 $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + y_4(t)$.

□

**例** 3.3.3 给定线性定常系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\\\dot{x}_3(t)\\\dot{x}_4(t)\\\dot{x}_5(t)\\\dot{x}_6(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&1&0&0&0&0\\0&-5&0&0&0&0\\0&0&-3&1&0&0\\0&0&0&-3&0&0\\0&0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\\x_5(t)\\x_6(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\5&7\\4&3\\0&0\\1&6\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)&u_2(t)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}y_1(t)&y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0&0\\1&4&0&2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\\x_5(t)\\x_6(t)\end{pmatrix}$$

试将该系统按照能控性和能观测性进行 Kalman 分解.

**解**：由于系统具有约当规范形，利用能控性约当规范形判据和能观测性约当规范形判据可知系统不完全能控且不完全能观测. 容易判定系统能控且能观测的状态变量为 $x_1(t), x_2(t)$, 系统能控但不能观测的状态变量为 $x_3(t), x_5(t)$, 系统不能控当能观测状态变量为 $x_4(t)$, 系统不能控且不能观测状态变量为 $x_6(t)$.

重新排列状态变量的顺序，即

$$\tilde{x}_{co}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix},\ \ \tilde{x}_{c\bar{o}}(t)=\begin{pmatrix}x_3(t)\\x_5(t)\end{pmatrix},\ \ \tilde{x}_{\bar{c}o}(t)=x_4(t),\ \ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)=x_6(t)$$

则

$$\tilde{x}(t)=\begin{pmatrix}\tilde{x}_{co}(t)\\\tilde{x}_{c\bar{o}}(t)\\\tilde{x}_{\bar{c}o}(t)\\\tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_5(t)\\x_4(t)\\x_6(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_5(t)\\x_4(t)\\x_6(t)\end{pmatrix}=Px(t)$$

由此可得系统按按照能控性和能观测性进行 Kalman 分解得规范表达式为

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_{co}(t) \\ \dot{\tilde{x}}_{c\bar{o}}(t) \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}o}(t) \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{co}(t) \\ \tilde{x}_{c\bar{o}}(t) \\ \tilde{x}_{\bar{c}o}(t) \\ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 1 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

□

**推论** 3.3.4 对不完全能控和不完全能观测的线性定常系统 (3.3.9), 其输入 - 输出描述只能反映系统中能控且能观测的那一部分. 即，传递函数矩阵

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \tilde{C}_{co}(sI - \tilde{A}_{co})^{-1}\tilde{B}_{co} = G_{co}(s).$$

□

该推论表明，通常系统的输入 - 输出描述只是对系统结构的一种不完全的描述，只有对完全能控且完全能观测的系统，输入 - 输出描述才能完全刻画系统的结构.

**注** 通常在理论上对于不完全能控或者是不完全能观测的线性时变系统，通过引入适当的可微非奇异线性变换，同样可以将系统的结构按能控性，或能观测性，或者同时按能控性和能观测性进行分解，并给出系统的规范表达式. 但是由于变换矩阵的构造和计算都很复杂，这里就不讨论了，有兴趣的读者可以查看相关的参考文献.

**补充** 事实上，通过计算传递函数矩阵可知

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \begin{pmatrix} \tilde{C}_{co} & 0 & \tilde{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI-\tilde{A}_{co} & 0 & -\tilde{A}_{13} & 0 \\ -\tilde{A}_{21} & sI-\tilde{A}_{c\bar{o}} & -\tilde{A}_{23} & -\tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & sI-\tilde{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{A}_{43} & sI-\tilde{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{B}_{co} \\ \tilde{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{C}_{co} & 0 & \tilde{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (sI-\tilde{A}_{co})^{-1} & 0 & * & 0 \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_{co} \\ \tilde{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{C}_{co} & 0 & \tilde{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (sI-\tilde{A}_{co})^{-1}\tilde{B}_{co} \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \tilde{C}_{co}(sI-\tilde{A}_{co})^{-1}\tilde{B}_{co} = G_{co}(s)
\end{aligned}
$$

由此可见，传递函数矩阵仅描述能控且能观测子系统的特征.