§3.5 实现问题

所谓实现问题，就是由表征系统外部因果关系的传递函数矩阵描述，来确定表征系统内部结构特性的状态应用描述。通过研究系统的实现问题，有助于比较深刻地揭示出系统的一些结构性质及其在不同描述下的反映，也便于采用各种类型的分析技术去研究系统的运动过程。

§3.5.1 系统的实现及其典型的类型

定义 3.5.1 对于定常线性系统，给定其传递函数矩阵 $G(s)$，如果可以找到一个状态描述:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Eu(t) \end{cases} \tag{3.5.1}$$

使得如下关系式成立:

$$C(sI - A)^{-1}B + E = G(s) \tag{3.5.2}$$

则称此状态空间描述式 $\sum(A, B, C, E)$ 为给定传递函数矩阵 $G(s)$ 的一个实现。

传递函数矩阵的实现具有以下一些基本特征：

(1) 实现的复杂程度可由其维数完全表征，一个实现的特征函数即为系统矩阵 A 的维数

(2) 实现的不唯一性：即对给定的 $G(s)$，可以有不同的维数的不同实现。而且，相同维数的实现也可以不同。

(3) 在传递函数矩阵 G(s) 的所有实现中，一定存在一类维数最低的实现，称为最小实现。从结构的角度而言，最小实现就是具有输入 - 输出特性 $G(s)$ 的系统的一个最简单的外部等价的结构模型。

(4) 一般来说，在传递函数矩阵 $G(s)$ 的各种实现之间没有代数等价的关系。只是对于最小实现，它们之间才具有代数等价的关系。

(5) 实现问题的物理本质是对一个具有“黑箱”形式的真实系统，在状态空间域内寻找一个外部等价的假想结构。如果可确定真实系统是完全能控

且能观测的，而所找到的一个实现也是完全能控且能观测的，则这种假想结构可完全表征真实系统的结构。否则的话，通过求解实现问题所找到的假想结构都只可能是真实系统的结构的一种不完全的反映。

(6) 如果给定传递函数矩阵 $G(s)$ 严格真的（即 $G(s)$ 的所有元 $G_{ij}(s)$ 均为 s 的真有理分式函数（分子多项式的阶数低于分母的阶数时）则其实现比具有形式 $\sum(A, B, C)$ 即 $E = 0$。如果 $G(s)$ 仅为真的（即 $G(s)$ 的所有元 $G_{ij}(s)$ 的分子多项式的阶数等于分母多项式的阶数时）其实现的形式为 $\sum(A, B, C)$ 其中 $E = \lim_{s\to\infty} G(s)$。

几种典型的实现：$\begin{cases} \text{能控类实现} \\ \text{能观测类实现} \\ \text{最小实现} \end{cases}$

(1) 能控类实现: 对于给定传递函数矩阵 G(s)，如果可以找到一个状态空间描述 $\sum(A, B, C, E)$ 使得

$$\begin{cases} C(sI - A)^{-1}B + E = G(s) \\ \text{(A,B) 完全能控} \end{cases}$$

则称 $\sum(A, B, C, E)$ 为 G(s) 的一个能控类实现。

(2) 能观测类实现: 对于给定传递函数矩阵 G(s)，如果可以找到一个状态空间描述 $\sum(A, B, C, E)$ 使得

$$\begin{cases} C(sI - A)^{-1}B + E = G(s) \\ \text{(A,B) 完全能观测} \end{cases}$$

则称 $\sum(A, B, C, E)$ 为 G(s) 的一个能观测类实现。

(3) 最小实现: 给定传递函数矩阵 G(s) 的维数最低的实现称为最小实现也称为不可约实现。

由于最小实现有着简单的结构，同时在理论和应用上都是最重要的一种实现。能控类实现和能观测类实现是两类典型的实现。从系统结构特性来说，这两类实现不仅对真实系统提供了很好的外部等价的假想结构，而且为构造 G(s) 的最小实现提供了一条捷径。

定理 3.5.1 设 $\sum(A,B,C)$ 为严格真的传递函数矩阵 *G(s)* 的一个实现，则其为最小实现的充分必要条件是 (A,B) 为完全能控且 (A,C) 为完全能观测的。

证明：必要性：若 $\sum(A,B,C)$ 为系统的最小实现，则其必为能控的并且是能观测的。若不然，则可以通过结构的规范分解找出其能控且能观测部分分解 $\sum(A_{11},B_1,C_1)$ 使得

$$C(sI-A)^{-1}B = C_1(sI-A_{11})^{-1}B_1$$

并且 $dim(A) > dim(A_{11})$。这表明：$\sum(A,B,C)$ 不是 G(s) 的最小实现。这就和已知条件矛盾。故 $\sum(A,B,C)$ 必是能控且能观测的。充分性：若 $\sum(A,B,C)$ 为能控且能观测的，则其必为最小实现。用反证法。设 $\sum(A,B,C)$ 不是系统的最小实现，则必存在另一个最小实现 $\bar{\sum}(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$ 使得 $n = dim(A) > dim(\bar{A}) = \bar{n}$。并且对任意的输入 u，它们有相同的输出 y。即

$$\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \int_0^t \bar{C}e^{\bar{A}(t-\tau)}\bar{B}u(\tau)d\tau$$

再由上式中 u 和 t 选取的任意性可知：

$$Ce^{A(t-\tau)}B = \bar{C}e^{\bar{A}(t-\tau)}\bar{B}$$

令 $\tau = 0$ 并且记：$H(t) = Ce^{At}B$，$\bar{H}(t) = \bar{C}e^{\bar{A}t}\bar{B}$，$\forall t \geq 0$ 对 H(t) 依次求 (2n-2) 各阶导数可得：

$$\begin{array}{rcccc}
H^{(1)}(t) & = & CAe^{At}B & = & Ce^{At}AB \\
H^{(2)}(t) & = & CAe^{At}AB & = & Ce^{At}A^2B \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
H^{(n-1)}(t) & = & CA^{n-1}e^{At}A^{n-2}B & = & Ce^{At}A^{n-1}B \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
H^{(2n-2)}(t) & = & CA^{n-1}e^{At}A^{n-1}B & = & Ce^{At}A^{2n-2}B
\end{array}$$

于是有：令

$$\begin{aligned}
L(t) &= \begin{bmatrix} H(t) & H^{(1)}(t) & \cdots & H^{(n-1)}(t) \\ H^{(1)}(t) & H^{(2)}(t) & \cdots & H^{(n)}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H^{(n-1)}(t) & H^{(n)}(t) & \cdots & H^{(2n-2)}(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Ce^{At}B & Ce^{At}AB & \cdots & Ce^{At}A^{n-1}B \\ Ce^{At}AB & Ce^{At}A^2B & \cdots & CAe^{At}A^{n-1}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ CA^{n-1}e^{At}B & CA^{n-1}e^{At}AB & \cdots & CA^{n-1}e^{At}A^{n-1}B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} e^{At} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = Q_0 e^{At} Q_c, \qquad t \geq 0
\end{aligned}$$

同理 $\bar{L}(t) = \bar{Q}_0 e^{\bar{A}t} \bar{Q}_c$。再由 $H(t) = \bar{H}(t)$ 可知 $L(t) = \bar{L}(t)$ 所以

$$Q_0 Q_c = L(0) = \bar{L}(0) = \bar{Q}_0 \bar{Q}_c$$

由于 $\sum(A,B,C)$ 是能控且能观测的，$rankQ_0 = n = rankQ_c$ 从而 $rank(\bar{Q}_0\bar{Q}_c) = n$。这样 $rank\bar{Q}_0 \geq n, \quad rank\bar{Q}_c \geq n$ 这与 $\bar{\sum}(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$ 的维数数 $dim(\bar{A}) < n$ 相矛盾。所以 $\sum(A,B,C)$ 必是系统的最小实现。

定理 3.5.2 对于给定传递函数矩阵 $G(s)$，其最小实现具有广义唯一性。即如果 $\sum(A,B,C)$ 和 $\bar{\sum}(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$ 为 $G(s)$ 的任意两个最小实现，则它们必是代数等价的。也就是存在非奇异矩阵 T，使得

$$\bar{A} = T^{-1}AT, \qquad \bar{B} = T^{-1}B, \qquad \bar{B} = CT$$

证明： 若 $\sum(A,B,C)$ 和 $\bar{\sum}(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$ 为 $G(s)$ 的任意两个最小实现，那么，有定理 1 可知它们均是能控且能观测的。于是 $rankQ_c = rankQ_0 = rank\bar{Q}_c = rank\bar{Q}_0 = n$ 从而矩阵 $\bar{Q}_c\bar{Q}_c^T$ 和 $\bar{Q}_0^T\bar{Q}_0$ 均是非奇异矩阵。令

$$T = Q_c\bar{Q}_c^T(\bar{Q}_c\bar{Q}_c^T)^{-1}, \bar{T} = (\bar{Q}_0^T\bar{Q}_0)^{-1}\bar{Q}_0^TQ_0$$

由定理 1 的证明中已知：$Q_0Q_c = \bar{Q}_0\bar{Q}_c$ 于是

$$\begin{aligned}\bar{T}T &= (\bar{Q}_0^T\bar{Q}_0)^{-1}\bar{Q}_0^TQ_0Q_c\bar{Q}_c^T(\bar{Q}_c\bar{Q}_c^T)^{-1}\\ &= (\bar{Q}_0^T\bar{Q}_0)^{-1}\bar{Q}_0^T\bar{Q}_0\bar{Q}_c\bar{Q}_c^T(\bar{Q}_c\bar{Q}_c^T)^{-1} = I\end{aligned}$$

这样 $\bar{T} = T^{-1}$。再注意到

$$\bar{Q}_c = (\bar{Q}_0^T\bar{Q}_0)^{-1}\bar{Q}_0^T\bar{Q}_0\bar{Q}_c = (\bar{Q}_0^T\bar{Q}_0)^{-1}\bar{Q}_0^TQ_0Q_c = \bar{T}Q_c = T^{-1}Q_c$$

考虑其第一列可得，$\bar{B} = T^{-1}B$ 同理 $\bar{Q}_0 = Q_0T$，考虑其第一行可得 $\bar{C} = CT$ 再由定理 1 的证明可知，

$$Q_0e^{At}Q_c = L(t) = \bar{L}(t) = \bar{Q}_0e^{\bar{A}t}\bar{Q}_c$$

两边关于 t 求导，并令 $t = 0$ 可得，

$$Q_0AQ_c = \bar{Q}_0\bar{A}\bar{Q}_c$$

于是

$$\bar{A} = (\bar{Q}_0^T\bar{Q}_0)^{-1}\bar{Q}_0^T\bar{Q}_0AQ_c\bar{Q}_c^T(\bar{Q}_c\bar{Q}_c^T)^{-1} = T^{-1}AT$$

下面的定理给出了一个直接从传递函数矩阵 G(s) 出发计算实现的最小阶数数的方法。

定理 3.5.3 设传递函数矩阵 *G(s)* 是严格真的，并记为 $G(s) = \sum_n^\infty h_is^{-i}$ 其中 $\{h_i, \quad i = 1, 2, \cdots\}$ 为马尔科夫（*Markov*）参数矩阵。定义如下的 *Hankel* 矩阵

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \cdots \\ h_2 & h_3 & h_4 & \cdots \\ h_3 & h_4 & h_5 & \cdots \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{bmatrix}$$

则 *G(s)* 的唯一状态空间实现的最小维数为 $n_{min} = rankH$。

证明：令 $\sum(A, B, C)$ 是 G(s) 的一个最小实现。其维数 $n_{min} = k$。由于

$$\sum_{i=1}^\infty h_is^i = G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \sum_{i=1}^n CA^{i-1}BS^{i-1}$$

所以

$$h_i = CA^{i-1}B, \qquad i = 1, 2, \cdots$$

于是

$$\begin{aligned}
H(k,k) &= \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_k \\ h_2 & h_3 & \cdots & h_{k+1} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ h_k & h_{k+1} & \cdots & h_{2k-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} CB & CAB & \cdots & CA^{k-1}B \\ CAB & CA^2B & \cdots & CA^kB \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ CA^{k-1}B & CA^kB & \cdots & CA^{2k-2}B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = Q_0Q_c
\end{aligned}$$

由于 $\sum(A,B,C)$ 是能控制且能观测的。所以，$rankQ_0 = rankQ_c = k$ 这样，

$$rankH(k,k) \leq min\{rankQ_0, rankQ_c\} = k$$

另一方面，由于 $(Q_0^TQ_0)$ 为非奇异的，所以

$$Q_c = (Q_0^TQ_0)^{-1}Q_0^TH(k,k) \qquad k = rankQ_c \leq rankH(k,k)$$

故 $rankH(k,k) = k$ 由于 $Cayley - Hamilton$ 定理可知，

$$rankH(k+n, k+n) = rank(k,k), n = 1, 2, \cdots$$

所以 $n_{min} = rankH$

§3.5.2　单输入 - 输出系统的实现

下面介绍根据给定的传递函数矩阵计算状态空间描述的系数矩阵的各种具体方法。

定理 3.5.4 设系统的传递函数矩阵 $G(s)$ 为严格真的，其可表示为如下的有理分式函数

$$G(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} \tag{3.5.3}$$

其中 $\alpha_i(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 和 $\beta_i(j = 0, 1, \cdots, n-1)$ 均为实数。

(1) 则系统的能控标准形实现 (A_c, B_c, C_c) 为

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c_c = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

(2) 则系统的能观测标准形实现 (A_0, b_0, c_0) 为

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & & & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad b_0 = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \qquad c_0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

证明：

(1) 由于 $(sI-A)^{-1} = \frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)} = \frac{1}{s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_0}\begin{bmatrix} * & \begin{matrix} \frac{1}{s} \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{matrix} \end{bmatrix}$ 于是

$$\begin{aligned} c_c(sI-A)^{-1}b_c &= \frac{1}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_0} \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & \begin{matrix} \frac{1}{s} \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_0} = G(s) \end{aligned}$$

(2) 同理直接计算可知

$$c_0(sI - A_0)^{-1}b_0 = G(s)$$

定理 3.5.5 设系统的传递函数矩阵 *G(s)* 为严格真的, 并且由 (*3.5.3*) 式给出。如果 λ_i 为 *G(s)* 的 μ_i 重极点。$i = 1, 2, \cdots, p$ 且当 $i \neq k$ 时 $\lambda_i \neq \lambda_k$, $\sum_{i=1}^{p} \mu_i = n$. 并将 *G(s)* 表示为

$$G(s) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{f_{ik}}{(s-\lambda_i)^k} \tag{3.5.4}$$

则系统的并联形实现 $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c})$ 为: $\tilde{A} = \begin{bmatrix} J1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_p \end{bmatrix}$ $\tilde{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$ $\tilde{c} = \begin{bmatrix} f_1 & \cdots & f_p \end{bmatrix}$ 其中 $J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix}$, $b_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f_k = \begin{bmatrix} f_{k\mu_k} & \cdots & f_{k1} \end{bmatrix}$ $k = 1, 2, \cdots, p$ 这里 λ_k $(k = 1, 2, \cdots, p)$ 可以是实数。也可以是共轭复数。在系统的并联形实现中, $\tilde{A}$ 具有若当标准形的形式。所以通常也将这类实现称为若当形实现。对于给定的传递函数 *G(s)* 构造其并联实现 $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c})$ 中的一个主要难点。是需要事先确定的出 *G(s)* 极点 λ_i $(i = 1, \cdots, p)$ 和各个系数 f_{ik} $(k = 1, \cdots, \mu_i)$ 当 *G(s)* 的次数 n 比较高时, 这在计算上并不是一件容易的事。

证明: 由于

$$\begin{aligned} \tilde{c}(sI-\tilde{A})^{-1}\tilde{b} &= \begin{bmatrix} f_1 & \cdots & f_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI-J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & (sI-J_p) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{p} c_i (sI-J_i)^{-1} b_i \end{aligned}$$

而

$$
\begin{aligned}
c_i(sI-J_i)^{-1}b_i &= \begin{bmatrix} f_{i\mu_i} & \cdots & f_{i1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s-\lambda_i & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & s-\lambda_i\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{(s-\lambda_i)^{u_i}}\begin{bmatrix} f_{i\mu_i} & \cdots & f_{i1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & \frac{1}{(s-\lambda_i)}\\ & \vdots\\ & (s-\lambda_i)^{\mu_i-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{f_{i1(s-\lambda_i)^{\mu_i-1}}+\cdots+f_{i\mu_i}}{(s-\lambda_i)^{\mu_i}}=\sum_{k=1}^{\mu_i}\frac{f_{ik}}{(s-\lambda_i)^k}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\tilde{c}(sI-\tilde{A})\tilde{b} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{\mu_i}\frac{f_{ik}}{(s-\lambda_i)^k}=G(s)
$$

定理 3.5.6 设系统的传递函数矩阵 *G(s)* 为严格真的，并且由 (*3.5.3*) 式给出。如果 $\{z_1,\cdots,z_{n-1}\}$ 和 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ 分别为 *G(s)* 的零点和极点，并且将 *G(s)* 表示为

$$
G(s)=\beta_{n-1}\frac{1}{(s-\lambda_n)}\Pi_{i=1}^{n-1}\frac{(s-z_i)}{(s-\lambda_i)} \tag{3.5.5}
$$

则系统的串联形实现 $(\hat{A},\hat{b},\hat{c})$ 为: $\hat{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & \\ \lambda_2-z_2 & \lambda_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \lambda_{n-1}-z_{n-1} & & \lambda_{n-1}-z_{n-1} & \lambda_{n-1} & \\ 1 & & \cdots & 1 & \lambda_n\end{bmatrix}$

$\hat{b}=\beta_{n-1}\begin{bmatrix}\lambda_1-z_1\\ \lambda_2-z_2\\ \vdots\\ \lambda_{n-1}-z_{n-1}\\ 1\end{bmatrix}$ $\hat{c}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$

证明： 直接导出状态方程，再两边作 Laplace 变化，计算 $\frac{\pi(s)}{u_s} = G(s)$ 注意：当传递函数 G(s) 的极点和零点均为实数时，系统的串联形实现可直接用于系统分析和仿真，而且系统的组成结构简单形式直观。

§3.5.3 多输入 - 多输出系统的实现

定理 3.5.7 *设系统的传递函数矩阵 G(s) 是严格真的，其可表示为如下有理分式矩阵形式:*

$$G(s) = \frac{P(s)}{d(s)} = \frac{1}{d(s)}[P_{k-1}s^{k-1} + \cdots + P_1 s + P_0] \tag{3.5.6}$$

其中，$P_m(m = 0, 1, \cdots, k-1)$ 为 $q \times p$ 矩阵。$d(s)$ 为 $G(s) = (g_{ij}(s))$ 的元素 $g_{ij}(s)(i = 1, \cdots, q \quad j = 1, \cdots, p)$ 的最小公分母，并且具有如下形式:

$$d(s) = s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

(1) 则系统的能控形实现 (A_c, B_c, C_c) 为

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & I_p & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & I_p \\ -\alpha_0 I_p & -\alpha_1 I_p & \cdots & -\alpha_{k-1}I_p \end{bmatrix} B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{bmatrix} C_c = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_{k-1} \end{bmatrix}$$

(2) 则系统的能观测形实现 (A_o, B_o, C_o) 为:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 I_q \\ I_q & & & -\alpha_1 I_q \\ & \ddots & & \vdots \\ & & I_q & -\alpha_{k-1}I_q \end{bmatrix} B_0 = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{k-a} \end{bmatrix} C_0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & I_q \end{bmatrix}$$

证明：

(1) 首先证明系统 $\sum(A_c, B_c, C_c)$ 是 G(s) 的一个实现。令

$$V(s) = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ \vdots \\ V_k(s) \end{bmatrix} = (sI - A_c)^{-1}B_c$$ 其中 $V_i(s), (i = 1, 2, \cdots, k)$ 为 $p \times q$ 矩阵。于是

$$(sI - A_c)V(s) = B_c \text{ 即 } sV(s) = A_cV(s) + B_c$$

这样，

$$\begin{aligned} V_2(s) &= sV_1(s) \\ V_3(s) &= sV_2(s) = s^2V_1(s) \\ \cdots \\ V_k(s) &= sV_{k-1}(s) = s^{k-1}V_1(s) \end{aligned}$$

以及

$$sV_k(s) = -\alpha_0V_1(s) - \alpha_1V_2(s) - \cdots - \alpha_{k-1}V_k(s) + I_p$$

于是,

$$(s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0)V_1(s) = d(s)V_1(s) = I_p$$

即:

$$V_1(s) = \tfrac{1}{d(s)}I_p, \quad V_i(s) = \tfrac{s^{i-1}}{d(s)}I_p, \quad i = 2, 3, \cdots, k$$

从而

$$\begin{aligned} C_c(sI - A_c)^{-1}B_c &= C_cV(s) = P_0V_1(s) + P_1(s)V_2(s) + \cdots + P_{k-1}V_k(s) \\ &= \frac{1}{d(s)}(P_0 + P_1 s + \cdots + P_{k-1}s^{k-1}) = G(s) \end{aligned}$$

其次证明 $\sum(A_c, B_c, C_c)$ 是能控的。由于 $B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad A_cB_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \\ * \end{bmatrix}$

$\cdots \quad A_c^{k-1}B_c = \begin{bmatrix} I_p \\ * \end{bmatrix}$

这样

$Q_c = \begin{bmatrix} B_c & A_cB_c & \cdots & A_c^{k-1}B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & I_p \\ & & \\ I_p & & \end{bmatrix} \quad rankQ_c = kp$

因此，$\sum(A_c, B_c, C_c)$ 是能控的

(2) 同理可证。