第一章　控制系统的数学模型

§1.1　控制系统的基本概念

§ 1.1.1 自动控制系统

首先，我们来介绍以下一些基本概念.

自动控制：在没有人参与的情况下，利用控制装置自动地操纵机器设备或生产过程使其具有希望的状态或功能.

自动控制系统：能够实现自动控制任务的系统，它是由控制器与控制对象按一定的方式组成的一个有机总体.

控制对象：要求实现自动控制的机器、设备或生产过程.

控制器：对控制对象起控制作用的设备总体，通常由各种结构不同的元部件组成，例如：测量元件、比较元件、放大元件、执行元件、补偿元件等.

输出量：表现于控制对象或系统输出端，并要求实现自动控制的物理量.

输入量：作用于控制对象或系统输入端，并可使系统具有预定功能或预定输出的物理量.

扰动：破坏系统输入量和输出量之间预定规律的信号.

例如：飞机 - 自动驾驶仪系统是由飞机和自动驾驶仪组成. 自动驾驶仪是一种能保持或改变飞机飞行状态的自动装置，它通过控制飞机三个操纵面 (升降舵、方向舵、副翼) 的偏转来改变舵面的空气动力特性，形成围绕飞机质心的旋转转矩，从而改变飞机的飞行姿态和轨迹. 例如，它可以稳定飞行的高度、姿态和航迹，也可以控制飞机的升高、下滑和转弯等.

虽然可以有用于不同目的的自动控制系统，每个系统也可以有自己的不同要求，但是作为自动控制系统被控量变化的全过程必有一个共同的基本要求，这就是稳定性、快速性和准确性. 这是检验自动控制系统品质的依据.

自动控制理论是研究自动控制共同规律及其应用的一门科学理论. 控制系统理论所研究的主要问题有以下几方面：(1) 如何从实际对象出发建立合理的数学模型. (2) 如何根据数学模型分析系统的特征. (3) 如何合理地设计出控制策略或控制器来达到控制目的. 围绕这些主要问题，我们可知：对实际系统的研究一般包括建立系统的数学模型、系统分析和系统设计三个部分. 其中，建立系统的数学模型是控制理论与实际问题之间的桥梁，有了具有适当精度的数学模型才能利用控制理论解决实际问题. 对系统的分析从定量和定性两方面入手，定量分析主要分析系统对特定输入的响应，定性分析主要是分析系统的能控性、能观测性和稳定性. 系统设计是在系统的模型上进行控制系统的设计，使系统按照人们要求的方式运行. 本书主要介绍已知系统的数学模型，以及如何对系统进行分析与设计.

§ 1.1.2 **自动控制方式**

1. **开环控制**

开环控制是指控制器与控制对象之间只有顺向作用而没有反向联系的控制过程，这种控制方式分为两种形式：

按给定值控制：信号由给定值至输出量单向传递，一定的给定值对应一定的输出量. 系统的控制精度取决于系统事先的调整精度，对工作过程中受到的扰动或特性参数的变化无法自动补偿. 这种控制结构简单、成本低廉，多用于系统结构参数较稳定和扰动信号较弱的场合，如：自动化流水线、自动报警器、自动售货机、自动洗衣机等.

按扰动补偿控制：利用对扰动信号的测量产生控制作用，以补偿扰动对输出量的影响. 由于扰动信号经测量装置、控制器至控制对象的输出量是单向传递的，故属于开环控制方式. 这种控制对于由不可测扰动以及各功能部件内部参数变化而造成的对输出量的影响，系统自身无法控制，因此这种控制的精度有限，常用于电源系统的稳压、稳频控制 (如彩电、电冰箱的保护器) 以及工作机械的恒速控制 (如稳定车床刀具转速等).

2. **闭环控制**

闭环控制 (又称反馈控制) 是指控制器与控制对象之间既有顺向作用又有反向联系的控制过程. 在这种控制系统中，控制装置对被控对象施加的控制作用是取自被控量的反馈信息，通过不断修正被控量的偏差来实现对被控对象进行控制的任务，这就是反馈控制的原理. 反馈控制是自动控制系统最基本的控制方式，这种控制抗干扰性好、控制精度高，在实际中被广泛应用.

其实，人的一切活动都体现出反馈控制的原理，人本身就是一个具有高度复杂控制能力的反馈控制系统. 在人们的日常生活过程中，许多平凡的动作都渗透着反馈控制的深奥原理. 例如，人手取物以及司机沿指定路线行驶车辆等.

3. **复合控制**

复合控制是开环控制和闭环控制相结合的一种控制方式，将按偏差控制与按扰动控制结合起来. 对于主要扰动采用适当的补偿装置实现按扰动控制，同时，在组成反馈控制的系统中实现按偏差控制以消除由扰动产生的偏差，这样就提高了系统的控制精度.

复合控制可以抑制许多可量测扰动，而且补偿器的参数也有较高的稳定性. 所以，在高精度的控制系统中复合控制具有广泛的应用，如：火炮随动系统、雷达站随动系统、平台随动系统、飞机自动驾驶仪以及人造地球卫星控制系统等等，均采用了复合控制方式.

4. **最优控制**

最优控制是使所选的系统性能指标达到最优的一种控制方式. 系统性能指标是根据工作要求选定的，例如：对自动导航系统，选取定位误差的均方值最小作为系统性能指标；对远距离航行的飞行

器，选取燃料消耗量最少作为系统性能指标．最优控制的设计方法主要有两种：变分法 (或极小原理) 和动态规划法，被广泛应用于高性能、高精度、多变量的复杂系统．最优控制理论也是现代控制理论的核心内容.

5. **鲁棒控制**

鲁棒控制是针对具有误差或外界干扰等不确定因素的系统模型而提出的一种控制方式．其基本思想是：当控制系统的数学模型具有不确定因素时，预先设计不依赖于其不确定性的控制器，使得实际控制系统在有不确定性存在的情况下也能满足预期的性能品质．在实际中鲁棒控制具有广泛的应用，例如：机器人系统和各种空间飞行器系统等.

6. **自适应控制**

自适应控制是能适应环境条件变化而自动调整系统参数或特性的一种控制方式．它将系统的辨识和最优控制有机的结合起来，并按照实体的模型去调整最优控制解．例如：在金属切削加工的自适应控制系统中，按照切削材料和刀具的硬度自动调整车速、进刀速度和刀削用量等以达到最高工效．又如，自适应飞机自动驾驶仪、自适应控制机械臂等．形象地说，自适应控制系统就是能自动改造系统的参数或结构，以适应系统本身参数和环境条件不可预计的显著变化的系统．自适应控制常用于空间技术和复杂生产过程的控制中.

此外，还有模糊控制、变结构控制等．随着控制理论的不断发展和计算机技术的不断更新，新的控制方式将不断涌现.

§ 1.1.3 控制系统的分类

自动控制系统有多种分类方法．例如，按信号传递路径，可分为开环、闭环与复合控制系统；按系统使用的能源，可分为机械、电气、液压和气动控制系统．在数学上，常用的是按下面两种方式进行分类：

1. **按系统用途分类**

主要可分为以下三类：

(1) 镇定系统 (或称调节器)：系统输入量为常值或者随时间缓慢地变化．系统的基本任务是当扰动出现时，使系统的输出量保持为恒定的希望值．如恒压调节器、水位控制器等等.

(2) 跟踪系统 (或称随动系统)：系统的输入量随时间任意变化．系统的基本任务是使系统输出量以要求的精度跟随输入量变化，而系统输出量常是机械位置、速度或加速度．例如火炮控制系统、自动化仪表系统等.

(3) 过程控制系统 (或称为程序控制系统)：系统输入量按既定规律变化，系统的控制过程按预定的程序进行．系统的输出量常为温度、压力、流量等物理量．例如加热炉的自动温度控制、石油化学

工业中的反应塔均采用过程控制系统.

2. **按系统性能分类**

主要可分为以下四类:

(1) 线性与非线性系统:可用线性微分方程或差分方程描述的系统,称为线性系统;用非线性方程描述的系统,称为非线性系统.

(2) 定常系统和时变系统:如果微分方程或差分方程的系数为常数,则称为定常系统;否则,称为时变系统.

(3) 连续与离散系统:若输入量和输出量都是时间的连续函数的系统称为连续系统,在连续系统中,信号在全部时间上都是已知的;若系统中信号有一处或一处以上为离散时间函数称为离散系统,在离散系统中,信号仅定义在离散时间上.

(4) 确定与不确定系统:系统的结构、参数和输入量都是确定的已知的系统称为确定系统;反之,当系统本身的结构或参数以及作用于该系统的信号有不确定性时,则系统为不确定系统. 现实的工程系统多为不确定系统.

此外,按系统的输入、输出变量个数分为单变量系统或多变量系统. 按随机因素加入与否分为随机系统或确定性系统.

§1.2 控制系统的数学模型

数学模型是描述控制系统中各变量之间相互作用关系和各自变化规律的数学表达式. 在控制系统的分析和设计中,首先要建立系统的数学模型. 自动控制系统的组成可以是电气的、机械的、液压的或气动的等等,然而描述这些系统的数学模型却可以是相同的. 因此,通过数学模型来研究自动控制系统,可以摆脱各种不同类型系统的外部特征而研究其内在共同运动规律. 通常,描述控制系统数学模型的形式不只一种,它们各有特长和最适合使用的场合且彼此之间有紧密的联系. 建立描述控制系统运动的数学模型是控制理论的基础.

控制系统数学模型的建立方法有分析法和实验法两类. 分析法是对组成系统各部分的运动机理进行分析,根据他们所依据的物理和化学定律列出各变量之间的数学关系式,也称为机理分析法或解析法. 实验法则是对系统施加某种类型的测试信号 (如脉冲、阶跃或正弦信号) 记录系统的时间响应曲线或频率响应曲线,从而获得系统的传递函数或频率特性得到系统的数学模型.

§ 1.2.1 控制系统的微分方程模型

微分方程是描述各种事物的最基本的数学工具,是各种数学描述方法的共同基础. 控制系统的

微分方程是在时间域 (简称时域) 内描述动态系统性能的数学模型．建立系统的微分方程的一般步骤如下：(1) 根据实际工作情况确定系统的输入量和输出量；(2) 根据物理或化学定律考虑到负载效应 (即：相邻组成部分之间的彼此影响), 列出各组成部分的原始微分方程；(3) 在可能条件下对各元件的原始方程进行适当简化，略去一些次要因素或进行线性化处理；(4) 从系统输入端开始依照信号的传递顺序, 在所有的组成部分的微分方程中消去中间变量得到描述系统输入和输出关系的微分方程; (5) 对求出的系统微分方程进行标准化处理，即将与输出有关的各项放在等号左侧，而将与输入有关的各项置于等号右侧．等号左、右侧各项均按降幂形式排列，并将各项系数归化为具有一定物理意义的形式.

例如：线性定常系统的微分方程具有下列典型形式：

$$a_0\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_n y(t)=b_0\frac{d^m u(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_{m-1}\frac{du(t)}{dt}+b_m u(t), \tag{1.2.1}$$

其中： $a_0\neq 0, b_0\neq 0$, 且 $n\geq 1, m\geq 0, n\geq m$. (1.2.1) 式左端是输出变量及其各阶导数，右端是输入变量及其各阶导数．各项的系数 $a_j(j=0,1,\ldots,n)$ 和 $b_i(i=0,1,\ldots,m)$ 均为实数.

例 1.1.1 确定如图所示 RLC 电路的微分方程.

解：状态变量的选取原则上是任意的，但是考虑到储能元件电感和电容的物理特性，选取 $u(t)$ 为输入量， $u_c(t)$ 为输出量．根据电路定理，可写出两个一阶微分方程

$$\begin{cases} L\dfrac{di(t)}{dt}+Ri(t)+u_c(t) &= u(t)\\ C\dfrac{du_c(t)}{dt} &= i(t)\end{cases}$$

经整理可得

$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}+RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=u(t)$$

其中 $u_c(t)=\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)dt$.

□

例 1.1.1 给出如图所示 RC 电路中的微分方程.

解：根据电路的欧姆定律和基尔霍夫定律，可写出如下关系式.

$$\begin{cases} Ri(t)+u_{c_1}(t) & = & u(t) \\ u_{c_2}(t)+u_{c_3}(t) & = & u_{c_1}(t) \\ i_1(t)+i_2(t) & = & i(t) \\ C_1\dfrac{du_{c_1}(t)}{dt} & = & i_1(t) \\ C_2\dfrac{du_{c_2}(t)}{dt} & = & i_2(t) \\ C_3\dfrac{du_{c_3}(t)}{dt} & = & i_2(t) \end{cases}$$

显然，上式方程组中真正相互独立的一阶微分方程只有两个，且 3 各储能元件又是相关的. 因此消掉中间变量，该电路的微分方程应是二阶的，即

$$(RC_2C_3+RC_1C_3+RC_1C_2)\frac{d^2u_{c_3}(t)}{dt^2}+(C_2+C_3)\frac{du_{c_3}(t)}{dt}=C_2\frac{du(t)}{dt}.$$

□

线性系统的一个非常重要的性质就是叠加原理，它表明：两个外作用同时施加于系统所产生的总输出等于各个外作用单独作用时分别产生的输出之和，并且外作用的数值增大若干倍时其相应的输出也增大同样的倍数. 因此，对线性系统进行分析和设计时，如果有几个外作用同时加于系统则可以将它们分别处理，依次求出各个外作用单独加入时系统的输出，然后将它们叠加. 特别地，每个外作用在数值上可只取单位值，从而大大简化了线性系统的研究工作.

建立控制系统数学模型的目的之一就是为了用数学方法定量研究控制系统的工作特性. 当得到系统微分方程描述后，只要给定输入量和初始条件便可对微分方程求解，并由此可以分析系统输出量随时间变化的特性. 通常数学上求解定常微分方程有两种方法，即经典方法和 Laplace 变换法. 经典方法得到的线性定常微分方程的解由特解和相应的齐次微分方程的通解组成，其中通解由微分方程的特征根决定.

由于控制系统的微分方程描述是在时域描述系统动态性能的数学模型，在给定外作用及初始条件下求解微分方程就可以得到系统的输出响应. 这种方法比较直观，特别是借助计算机可以较快而准确得到所需结果. 但是，如果系统的结构和参数发生变化就需要重新求解微分方程，因此这种描述不便于对系统进行分析和设计.

§ 1.2.2 控制系统的传递函数 (矩阵)

用 Laplace 变换求解线性系统的微分方程时，就可以得到控制系统的另一种数学模型 - 传递函数 (矩阵). 传递函数不仅可以表征系统的动态性能，而且还可以用来研究系统的结构和参数变化对系

统性能的影响. 传递函数是控制系统在频率域描述动态系统性能的数学模型，经典控制理论就是在传递函数的基础上建立和发展起来的.

1. **传递函数的定义：**

线性定常系统的传递函数是零初始条件下,输出变量的 Laplace 变换像函数与输入变量的 Laplace 变换像函数之比.

例如：当初始条件为零时，对微分方程

$$a_0\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_n y(t)=b_0\frac{d^m u(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_{m-1}\frac{du(t)}{dt}+b_m u(t)$$

两边作 Laplace 变换，可得：

$$(a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n)Y(s)=(b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m)U(s).$$

由传递函数的定义可得：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

为所求系统的传递函数.

2. **传递函数的性质**

传递函数是一种用系统参数表示输出量与输入量之间关系的表达式，它只是取决于系统或元件的结构和参数，而与输入量的形式无关.

(1) 传递函数是复变量 s 的有理分式函数. 通常 $n\geq m$, 且所有系数均为实数;

(2) 传递函数的分子多项式及分母多项式与相应微分方程的右端及左端微分算子多项式相对应，传递函数与微分方程所包含的信息量相同;

(3) 传递函数只取决于系统的结构和参量，与输入量的形式无关，也不反映系统内部的任何信息. 传递函数是数学模型的输入输出模式，是系统的外部描述.

3. **传递函数的极点和零点**

传递函数的分子多项式和分母多项式经因式分解后可以写成传递函数的零点和极点表达式：

$$G(s)=\frac{b_0(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{a_0(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}=\frac{K^*\prod_{i=1}^m(s+z_i)}{\prod_{j=1}^m(s+p_j)},$$

其中 $-z_i(i=1,2,\ldots,m)$ 是分子多项式的根，称为传递函数的零点； $-p_j(j=1,2,\ldots,n)$ 是分母多项式的根，称为传递函数的极点.

后面的研究将会看到：传递函数的分母多项式就是系统的特征多项式，分母多项式等于零所得

的方程就是它的特征方程. 特征方程的根称为特征根，也就是它的极点， $K^*=\dfrac{b_0}{a_0}$ 是传递系数. 由于传递函数的极点就是微分方程的特征根，因此它们决定了所描述系统自由运动的模态. 传递函数的零点则影响各模态在输出响应中所占的比重，也影响输出响应曲线的形状.

传递函数也可以写成传递函数的时间常数表达式

$$G(s)=\frac{b_m(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\ldots(\tau_m s+1)}{a_n(T_1 s+1)(T_2 s+1)\ldots(T_n s+1)}=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{\prod_{j=1}^{n}(T_j s+1)}$$

其中 $\tau_i(i=1,2,\ldots,m)$ 和 $T_j(j=1,2,\ldots,n)$ 称为时间常数， $K=\dfrac{b_m}{a_n}$. 当 $G(s)$ 是控制系统的开环传递函数时， K 是系统的开环放大倍数，称为稳态增益.

4. **传递函数矩阵**

对于多输入多输出线性定常系统，传递函数矩阵是表征系统输入 - 输出特性的最基本的形式. 对于多输入多输出的线性定常系统，记 $\{u_1,u_2,\ldots,u_p\}$ 为输入变量组， $\{y_1,y_2,\ldots,y_q\}$ 为输出变量组，且假设系统的初始条件为零. 用 $\hat{y}_i(s)$ 和 $\hat{u}_j(s)$ 分别表示 y_i 和 u_j 的 Laplace 变换， $g_{ij}(s)$ 表示系统的由第 j 个输入端到第 i 个输出端的传递函数，其中 $i=1,2,\ldots,q,j=1,2,\ldots,p$, 那么由系统的线性属性 (即满足叠加原理) 可以导出：

$$\begin{cases}\hat{y}_1(s) & = & g_{11}(s)\hat{u}_1(s)+g_{12}(s)\hat{u}_2(s)+\cdots+g_{1p}(s)\hat{u}_p(s),\\ \hat{y}_2(s) & = & g_{21}(s)\hat{u}_1(s)+g_{22}(s)\hat{u}_2(s)+\cdots+g_{2p}(s)\hat{u}_p(s),\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \hat{y}_q(s) & = & g_{q1}(s)\hat{u}_1(s)+g_{q2}(s)\hat{u}_2(s)+\cdots+g_{qp}(s)\hat{u}_p(s),\end{cases}$$

其向量方程的形式则为：

$$\bar{y}(s)=\begin{pmatrix}\hat{y}_1(s)\\ \vdots\\ \hat{y}_q(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11}(s) & \ldots & g_{1p}(s)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ g_{q1}(s) & \ldots & g_{qp}(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{u}_1(s)\\ \vdots\\ \hat{u}_p(s)\end{pmatrix}=G(s)u(s),$$

称由上式定义的 $G(s)$ 为系统的传递函数矩阵， $G(s)$ 为一个 $q\times p$ 的有理分式矩阵.

§ 1.2.3 控制系统的状态空间表示

建立系统的数学模型是分析和研究系统的主要依据. 在经典控制理论中常用的数学模型有：关于输入、输出变量的微分方程式以及传递函数等，但是这些数学模型一般只能反映单输入 - 单输出系统的外部特性，而不能包含系统的全部信息. 在现代控制论中，通常用状态变量来描述系统. 系统的数学模型是状态空间表达式，它由系统的状态方程和输出方程组成.

先介绍一些重要的概念.

输入：由外部施加到系统上的全部激励.

输出：能从外部测量到的来自系统的信息.

状态：动态系统的状态可以定义为信息的集合. 在已知未来外部输入的情况下，这些信息对于确定系统未来的行为是十分必要的.

状态变量：确定动力学系统状态的最少的一组变量.

状态向量：如果 n 个状态变量用 $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ 表示，那么可将这些状态变量看作是向量 $x(t)$ 的各个分量，即：

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T.$$

状态空间：以各状态变量作为基底所组成的 n 维向量空间. 在特定的时刻 t, 状态向量 $x(t)$ 在状态空间中是一个点.

状态轨线：状态向量 $x(t)$ 在状态空间中随时间 t 变化的轨迹.

连续时间系统：状态向量 $x(t)$ 的定义域为某时间域 $[t_0, t_f]$ 内的一切实数.

离散时间系统：状态向量 $x(t)$ 的自变量时间 t 只能取到某实数域内的离散值.

状态方程：描述系统状态变量与输入变量之间关系的一阶微分方程组（连续时间系统）或一阶差分方程组 (离散时间系统). 其一般形式为：

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \ \text{或} \ x(t_{k+1}) = f(x(t_k), u(t_k), t_k).$$

状态方程表征了系统由输入所引起的内部状态的变化.

输出方程：描述系统输出变量与系统的输入变量和状态变量之间函数关系的代数方程，其一般形式为：

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \ \text{或} \ y(t_k) = g(x(t_k), u(t_k), t_k).$$

输出方程表征了由系统内部状态的变化和输入而引起得系统输出的变化，它是一个变换过程.

状态空间表达式：状态方程和输出方程联立起来构成一个对动态系统的完整描述，称为系统的状态空间表达式. 其一般形式为：

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t), t) \\ y(t) & = & g(x(t), u(t), t) \end{array} \right. , \ \text{或} \ \left\{ \begin{array}{lcl} x(t_{k+1}) & = & f(x(t_k), u(t_k), t_k) \\ y(t_k) & = & g(x(t_k), u(t_k), t_k) \end{array} \right. .$$

自治系统：若系统的状态空间表达式中，函数 f 与 g 中均不显含时间 t 或 t_k，则称为自治系统.

其一般形式为：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{cases}，\text{或} \begin{cases} x(t_{k+1}) &= f(x(t_k), u(t_k)) \\ y(t_k) &= g(x(t_k), u(t_k)) \end{cases}.$$

线性系统：若在系统的状态空间表达式中 f 和 g 均是线性函数，则称系统为线性系统，否则为非线性系统.

线性系统的状态空间表达式：线性系统的状态方程是一阶向量线性微分方程或一阶向量线性差分方程，输出方程是向量代数方程. 对于连续时间系统，它的一般形式为：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}.$$

对于离散时间系统，实际中常取 $t_k = kT$(T 称做该离散时间系统的采样周期)，它的一般形式为：

$$\begin{cases} x(k+1) &= F(k)x(k) + G(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{cases}$$

通常，状态向量 $x \in R^n$，输入向量 $u \in R^m$，输出向量 $y \in R^l$. $n \times n$ 矩阵 $A(t)$ 和 $F(k)$ 称为状态矩阵， $n \times m$ 矩阵 $B(t)$ 和 $G(k)$ 称为输入矩阵， $l \times n$ 矩阵 $C(t)$ 和 $C(k)$ 称为输出矩阵， $l \times m$ 矩阵 $D(t)$ 和 $D(k)$ 称为输入输出矩阵.

线性定常系统：在线性系统的状态空间表达式中，若系数矩阵 $A(t), B(t), C(t), D(t)$ 或 $F(k), G(k), C(k), D(k)$ 的各元素都是常数，则称该系统为线性定常系统，否则称为线性时变系统.

其一般形式为：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}，\text{或} \begin{cases} x(k+1) &= Fx(k) + Gu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases}.$$

若 $D \neq 0$，称系统为固有系统，简记为系统 $\{A, B, C, D\}$ 或系统 $\{F, G, C, D\}$.

若 $D = 0$，称系统为绝对固有系统，简记为：系统 $\{A, B, C\}$ 或系统 $\{F, G, C\}$.

系统的状态空间表达式的建立方法主要有两种：

(1) 直接根据系统的机理建立相应的微分或差分方程，再经整理规范化而得到.

(2) 由该系统已知的另外某种数学模型 (例如：单输入单输出系统的微分方程) 经过转化而得到. （下节中介绍）

§ 1.2.4 **等价变换与系统的规范形**

对于一个给定的动态系统，由于状态变量选择的不同，同一个系统可以有不同形式的状态空间表达式. 但是由于不同的状态变量均选自系统内部，与系统的运动本质有内在联系，因此不同形式的状态空间表达式之间必存在相互转换关系.

1. **等价变换**

设线性时变系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &=& A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &=& C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

的状态空间为 $\mathcal{X} \subseteq R^n$, 则在 R^n 的标准基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 下，$\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 的任意一个非奇异线性变换都可以用一个非退化的 n 阶矩阵 $P^{-1}(t)$ 来表示. 即：$P^{-1}(t) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, x(t) \mapsto \bar{x}(t)$, $t \in I = [t_0, t_1]$, 其中 $P(t)$ 是连续可微且可逆的矩阵函数，显然 $\bar{x}(t) = P^{-1}(t)x(t)$. 由于

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) &=& \dot{P}^{-1}(t)x(t) + P^{-1}(t)\dot{x}(t) = (\dot{P}^{-1}(t) + P^{-1}(t)A(t))P(t)\bar{x}(t) + P^{-1}(t)B(t)u(t) \\ y(t) &=& C(t)P(t)\bar{x}(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

如果令变换后系统的状态空间表示为

$$\bar{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) &=& \bar{A}(t)\bar{x}(t) + \bar{B}(t)u(t) \\ y(t) &=& \bar{C}(t)\bar{x}(t) + \bar{D}(t)u(t) \end{cases}$$

那么

$$\begin{cases} \bar{A}(t) &=& \dot{P}^{-1}(t)P(t) + P^{-1}(t)A(t)P(t) \\ \bar{B}(t) &=& P^{-1}(t)B(t) \\ \bar{C}(t) &=& C(t)P(t) \\ \bar{D}(t) &=& D(t) \end{cases} \qquad (*)$$

其中 $\dot{P}^{-1}(t) = \dfrac{dP^{-1}(t)}{dt}$. 此时，称这两个线性时变系统 Σ 和 $\bar{\Sigma}$ 是等价的. 这样，如果两个系统的系数矩阵函数满足 $(*)$ 式，则称它们之间的变换 $x(t) = P(t)\bar{x}(t)$ 为等价变换. 特别地，当 $P(t)$ 是一个可逆的数值矩阵时 $\dot{P}^{-1}(t) = 0$. 因此，如果两个线性定常系统 $\Sigma\{A, B, C, D\}$ 和 $\bar{\Sigma}\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\}$ 是等价的，那么它们的系数矩阵之间满足

$$\bar{A} = P^{-1}AP,\ \bar{B} = P^{-1}B,\ \bar{C} = CP,\ \bar{D} = D,$$

由此可见，系统矩阵 $\bar{A}$ 与 A 是相似的. 因此，两个等价的线性定常系统必有相同的特征多项式和特征根.

等价变换实际上刻划了同一系统中，当选取不同的状态变量时，所得到不同方程的相应矩阵之间应满足的关系. 由于同一系统的物理性质、代数性质以及几何性质并不会因为选取了不同状态变量来描述系统而引起改变，因此等价变换应该保持系统的属性不变. 例如，系统的特征方程及特征值不变等等. 等价变换是研究控制系统的一种非常重要的方法，通常总是选取适当的线性变化，使得变换后所得到得系统的表达式具有更为简单的形式，从而便于计算以及揭示系统的本质特征.

2. **特征方程与规范型:**

(1) 线性系统的特征方程：线性系统 $\{A, B, C, D\}$ 的特征方程定义为 $f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$

(2) 矩阵 A 的特征值和特征向量称为线性系统 $\{A, B, C, D\}$ 的特征值和特征向量.

根据线性代数知识，我们可以将系统矩阵 A 化为以下几种典型情况.

一. 化系统矩阵 A 为对角形

(1) 当 A 为 n 阶方阵，并且有 n 个互异的实特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 时可以经过非奇异线性变换将 A 化为对角阵 D

$$D = P^{-1}AP = diag\begin{pmatrix}\lambda_1, & \lambda_2, & \cdots, & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中变换矩阵 P 由矩阵 A 的实特征值 λ_i 所对应的实特征向量 p_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, 组成

$$P = \begin{pmatrix}p_1, & p_2, & \cdots, & p_n\end{pmatrix}, Ap_i = \lambda_i p_i,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

(2) A 为 n 阶方阵， λ_1 为 A 的 m 重实特征值，其余为 $(n-m)$ 个互异的实特征值. 但是，如果由 $Ap_i = \lambda_1 p_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 仍可以求出 m 个相互独立的实特征向量 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ ，此时仍然可以将系统矩阵 A 化为对角阵 D

$$D = P^{-1}AP = diag\begin{pmatrix}D_m, & \lambda_{m+1}, & \cdots, & \lambda_n\end{pmatrix}, D_m = diag\begin{pmatrix}\lambda_1, \cdots, \lambda_1\end{pmatrix}$$

其中变换矩阵 $P = \begin{pmatrix}p_1, & \cdots, & p_m, & p_{m+1}, & \cdots, & p_n\end{pmatrix}$ 而 $p_{m+1}, \cdots, p_n$ 就是互异的实特征值 λ_j, $j = m+1, \cdots, n$, 所对应的实特征向量.

二. 化系统矩阵 A 为若当标准形

(1) A 为 n 阶方阵， λ_1 为 A 的 m 重实特征值，其余为 $(n-m)$ 个互异的实特征值. 但是由 $Ap_1 = \lambda_1 p_1$ 只能求出一个独立的实特征向量 p_1, 此时可以将系统矩阵 A 化为约当矩阵 J

$$J = P^{-1}AP = diag\begin{pmatrix}J_m, & \lambda_{m+1}, & \cdots, & \lambda_n\end{pmatrix},\ J_m = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1\end{pmatrix}_m$$

其中变换矩阵 $P=\begin{pmatrix}p_1, & p_2, & \cdots, & p_m, & p_{m+1}, & \cdots, & p_n\end{pmatrix}$. 这里 $p_1,p_{m+1},\cdots,p_n$ 是互异的实特征值 $\lambda_j,\ j=1,m+1,\cdots,n$ 对应的实特征向量，而 $p_2,\cdots,p_m$ 是对应于实特征值 λ_1 的广义实特征向量，满足

$$\begin{pmatrix}p_1, & p_2, & \cdots, & p_m\end{pmatrix} J_m = A\begin{pmatrix}p_1, & p_2, & \cdots, & p_m\end{pmatrix}.$$

(2) 当 A 为 n 阶方阵，并且 λ_i 为 A 的 l_i 重实特征值， $i=1,2,\cdots,\alpha$ ，那么可以将系统矩阵 A 化为若当矩阵 J

$$J=P^{-1}AP=diag\left(J_1,J_2,\cdots,J_\alpha\right),\ \ J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{l_i},\ i=1,2,\cdots,\alpha.$$

其中变换矩阵 $P=\begin{pmatrix}p_1^1, & \cdots, & p_{l_1}^1, & \cdots, & p_1^\alpha, & \cdots, & p_{l_\alpha}^\alpha\end{pmatrix}$, 这里 $p_1^i,\cdots,p_{l_i}^i$ 是对应于实特征值 $\lambda_i,\ i=1,2,\cdots,\alpha$ 的实特征向量和广义实特征向量.

当矩阵 A 有 l_i 重实特征值 λ_i 时，只要能够从 $(\lambda_i I-A)p_i=0$ 中可以解出与 λ_i 的重数 l_i 相同个数的独立的实特征向量，利用上述方法仍然可以求出相应的对角矩阵. 通常称 l_i 为特征值 λ_i 的代数重数，而 $n-rank(\lambda_i I-A)$ 称为特征值 λ_i 的几何重数，两者不一定相等. 当特征值 λ_i 的代数重数等于它的几何重数时，可以将相应的矩阵化为对角矩阵. 一般来说，相同的特征值可以有多个若当块，重特征值 λ_i 对应的若当块数目等于该特征值的几何重数 $n-rank(\lambda_i I-A)$, 而其中大于或等于 2 阶的若当块数目为 $rank(\lambda_i I-A)-rank(\lambda_i I-A)^2$, 大于或等于 3 阶的若当块数目为 $rank(\lambda_i I-A)^2-rank(\lambda_i I-A)^3$, 以此类推.

三. 化系统矩阵 A 为模式标准形

(1) A 为 2 阶方阵，并且具有一对复特征值 $\lambda_{1,2}=\sigma\pm j\omega,\ j=\sqrt{-1}$. 此时，可以经过非奇异线性变换 P 将系统矩阵 A 化为对角矩阵 D

$$D=P^{-1}AP=diag\begin{pmatrix}\sigma+j\omega, & \sigma-j\omega\end{pmatrix}.$$

其中，变换矩阵 $P=\begin{pmatrix}p_1,p_2\end{pmatrix}$, 这里的 p_1,p_2 分别为对应于复特征值 λ_1,λ_2 的复特征向量. 由于 λ_1 与 λ_2 是复共轭的，所以系统矩阵 A 可以经过实的非奇异变换化为以下的实模式矩阵 M

$$M=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{pmatrix}$$

其中, 变换矩阵 $Q=\begin{pmatrix}Re\ q, & Im\ q\end{pmatrix}$, 这里的 q 为对应于复特征值 λ_1 的复特征向量，$Re\ q$ 和 $Im\ q$ 分别为向量 q 的实部和虚部.

(2) A 为 n 阶方阵, 具有 m 个互异的实特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 和 l 对复特征值 $\lambda_i=\sigma_i\pm j\omega_i$, $i=1,2,\cdots,l$, $m+2l=n$. 那么可以将系统矩阵 A 化为以下实模式矩阵 M

$$M=Q^{-1}AQ=diag\begin{pmatrix}\lambda_1, & \cdots, & \lambda_m, & M_1, & \cdots, & M_l\end{pmatrix},\ M_i=\begin{pmatrix}\sigma_i & \omega_i\\ -\omega_i & \sigma_i\end{pmatrix}, i=1,2,\cdots,l.$$

其中，变换矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}p_1, & \cdots, & p_m, & \vdots & Re\ q_1, & Im\ q_1 & \vdots & \cdots & \vdots & Re\ q_l,\ Im\ q_l\end{pmatrix},$$

这里 p_i 是实特征值 λ_i, $i=1,2,\cdots,m$ 对应的实特征向量， q_i 是复特征值 $\lambda_i=\sigma_i+j\omega_i$, $i=1,2,\cdots,l$ 对应的复特征向量.

(3) A 为 n 阶方阵, 具有一对 r 重复特征值 $\lambda_1=\sigma\pm j\omega$, 其余为 $(n-2r)$ 个互异的实特征向量. 那么，可以将系统矩阵 A 化为以下实模式矩阵 M

$$M=Q^{-1}AQ=diag\begin{pmatrix}T & \vdots & \lambda_{n-2r+1}, & \cdots, & \lambda_n\end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix}T_1 & I & & \\ & T_1 & \ddots & \\ & & \ddots & I\\ & & & T_1\end{pmatrix}_{2r}$$

$$T_1=\begin{pmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

其中，变换矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}Re\ q_1, & Im\ q_1 & \vdots & \cdots & \vdots & Re\ q_r, & Im\ q_r & \vdots & p_{n-2r+1} & \cdots, & p_n\end{pmatrix}$$

这里， $p_{n-2r+1},\cdots,p_n$ 是对应于实特征值 λ_i, $i=n-2r+1,\cdots,n$ 的实特征向量． q_1 是对应于复特征值 λ_1 的复特征向量， $q_2,\cdots,q_r$ 是对应于复特征值 λ_1 的广义复特征向量，满足

$$\begin{pmatrix}Re\ q_1, & Im\ q_1 & \vdots & \cdots & \vdots & Re\ q_r, & Im\ q_r\end{pmatrix}T=A\begin{pmatrix}Re\ q_1, & Im\ q_1 & \vdots & \cdots & \vdots & Re\ q_r, & Im\ q_r\end{pmatrix}.$$

对于一个线性定常系统 $\Sigma\{A,B,C,D\}$, 若系统矩阵 A 为对角标准形或约当标准形或模式标准形，则称系统 $\Sigma\{A,B,C,D\}$ 为一个规范形．化线性定常系统 $\Sigma\{A,B,C,D\}$ 为规范形的方法：(1) 求出系统矩阵 A 的全部特征值．(2) 若 A 具有 n 个互异的实特征值，求出对应于特征值的实特征向量组成变换矩阵 P, 经变换后的矩阵 $D=P^{-1}AP$ 为对角标准形．否则进入下一步．(3) 若 A 具有重实特征值，对应于特征值求出一组独立的实特征向量 (或实的广义特征向量) 组成变换矩阵 P. 经变

换后的矩阵 $J=P^{-1}AP$ 为对角形或约当标准形，否则进入下一步. (4) 若 A 具有复特征值, 对应于特征值求出一组独立的复特征向量, 取其实部和虚部组成变换矩阵 Q, 经变换后的矩阵 $M=Q^{-1}AQ$ 为模式标准形.

求变换矩阵 P 的方法：(1) 特征值互不相同，求出属于不同特征值所对应的特征向量，从而组成变换矩阵 P. (2) 有重特征值，但对应不同特征值可以求出 n 个独立特征向量，从而组成变换矩阵 P. (3) 有重特征值，采用求广义特征向量的方法，求出 n 个独立的特征向量组成变换矩阵 Q. (4) 对于友矩阵，求变换矩阵 P 的方法如下.

友矩阵：具有以下形式的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$ 称为友矩阵. 在控制理论研究中这是一类很重要的矩阵.

对应友矩阵 A 的不同的特征值情况，将 A 化为相应对角标准形或约当标准形的变换矩阵 P 是不同形式的范德蒙矩阵.

定理 1.2.1 若 A 是一个友矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$,

(i) 如果 A 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 互异，那么变换矩阵 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$,

(ii) 如果 A 有重特征值，那么变换矩阵 $Q=\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \cdots & Q_{1m} & \vdots & Q_{21} & \cdots \end{pmatrix}$,

其中 $Q_{i1}=\begin{pmatrix} 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \cdots & \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix}^T$, $Q_{ik}=\dfrac{1}{(k-1)!}\cdot\dfrac{d^{(k-1)}Q_{ik}}{d\lambda_i^k}$

□

例 1.2.1 试将状态方程

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}u(t)$$

变换为对角线标准形.

解：(1) 首先求矩阵的特征值．由下式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

求得为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$.

(2) 求变换矩阵 P.

当 $\lambda_1 = 2$ 时，对应的特征矢量记为 $P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$, 则有 $(\lambda_1 I - A)P_1 = 0$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = 0$$

对特征矩阵作行初等变换，可得

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = 0$$

解得 $p_{11} = 2p_{21}$, 取 $p_{21} = 1$, 于是 $p_{11} = 2$, 则有 $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

同理，特征值 $\lambda_2 = -3$ 所对应的特征向量记为 $P_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$, 则有 $(\lambda_2 I - A)P_2 = 0$. 即

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = 0$$

对特征矩阵作行初等变换，可得

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = 0$$

解得 $p_{22} = -2p_{12}$, 取 $p_{12} = 1$, 于是 $p_{22} = -2$, 则有 $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. 变换阵为

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & -0.4 \end{pmatrix}.$$

(3) 写出变换后的状态方程

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \tilde{B} = P^{-1}B = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{pmatrix}$$

所以

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \bar{x}(t) + \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{pmatrix} u(t).$$

□

例 1.2.2 系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

试变换为对角线标准形.

解：系统特征方程为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

特征值为： $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3.$

系统矩阵 A 为友矩阵，则变换阵 P 可取范德蒙阵，即

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = P^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = CP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

经线性变换后系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \\ \dot{\tilde{x}}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

□

例 1.2.3 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，试化 A 为约当标准形.

解：(1) 求特征值.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

(2) 求变换阵 P.

当 $\lambda_{1,2} = 1$, 由方程

$$(\lambda_1 I - A)P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} = 0$$

可得 $p_{31} = 0, p_{11}$ 和 p_{21} 可取任意值.

令 $p_{11} = 1, p_{21} = 0$; 及 $p_{11} = 0, p_{21} = 1$, 可得两组线性无关解，故得到两个独立特征向量：

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

同样，再由 $\lambda_3=2,(\lambda_3 I-A)P_3=0$ 得

$$P_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

显然， P_1,P_2,P_3 是线性无关特征向量，则非奇异变换阵为

$$P=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) 化对角线标准形.

$$\tilde{A}=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

□

例 1.2.4 已知系统矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&6&-5\\1&0&2\\3&2&4\end{pmatrix}$，试化 A 为约当标准形.

解：求特征值

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-6&5\\-1&\lambda&-2\\-3&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$$

得 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$. 将 $\lambda_1=1$ 代入 $(\lambda_1 I-A)Q_1=0$ 得

$$\begin{pmatrix}1&-6&5\\-1&1&-2\\-3&-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{11}\\q_{21}\\q_{31}\end{pmatrix}=0$$

对特征矩阵作行初等变换，可得

$$\begin{pmatrix}1&-6&5\\0&-5&3\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{11}\\q_{21}\\q_{31}\end{pmatrix}=0$$

任取 $q_{31}=-5$, 求得： $q_{21}=-3, q_{11}=7$, 则 $Q=\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$, 再将 Q_1 代入下式，求出广义特征矢量 Q_2, 有

$$(\lambda_2 I-A)Q_2=-Q_1, \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

同理，由初等变换可解出

$$Q_2=\begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

将 $\lambda_3=2$ 代入 $(\lambda_3 I-A)Q_3=0$ 中，于是

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{13} \\ q_{23} \\ q_{33} \end{pmatrix}=0$$

对特征矩阵作行初等变换，可得

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{13} \\ q_{23} \\ q_{33} \end{pmatrix}=0$$

任取 $q_{33}=-2$, 求得 $q_{23}=-1, q_{13}=2$, 可得

$$Q_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

变换矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0.6 & 2 \\ -3 & -0.4 & -1 \\ -5 & -2 & -2 \end{pmatrix}, Q^{-1}=\begin{pmatrix} 1.2 & 2.8 & -0.2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -4 & -11 & 1 \end{pmatrix}$$

所以， A 的约当标准形有

$$J=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

□

例 1.2.5 已知系统矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-4&-3\end{pmatrix}$$

试化 A 为特征值模态规范形. （王划一 P63)

解：(1) 求特征值.

$$|\lambda I-A|=\begin{pmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\2&4&\lambda+3\end{pmatrix}=(\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+2)=0$$

得 $\lambda_1=-1,\lambda_{2,3}=-1\pm j$.

(2) 求特征向量.

将 $\lambda_1=-1$ 代入 $(\lambda_1 I-A)Q_1=0$, 有

$$\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\2&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{11}\\q_{21}\\q_{31}\end{pmatrix}=0$$

对特征矩阵作行初等变换，可得

$$\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{11}\\q_{21}\\q_{31}\end{pmatrix}=0$$

任取 $q_{11}=1$, 则有：$q_{21}=-1,q_{31}=1$, 即 $Q_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. 再将 $\lambda_2=-1+j$ 代入 $(\lambda_2 I-A)Q_2=0$,

有

$$\begin{pmatrix}-1+j&-1&0\\0&-1+j&-1\\2&4&2+j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{12}\\q_{22}\\q_{32}\end{pmatrix}=0$$

对特征矩阵作行初等变换，得

$$\begin{pmatrix} -1+j & -1 & 0 \\ 0 & -1+j & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \end{pmatrix} = 0$$

任取 $q_{12}=1$, 则得： $q_{22}=-1+j, q_{32}=-2j$, 即

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+j \\ -2j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = q_2 + jq_3$$

因此，可得变换矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以， A 阵的模态规范形为

$$\begin{aligned} J = Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \omega \\ 0 & -\omega & \sigma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

为了后面研究问题的方便，这里给出两个命题.

命题 1.2.1 下面给出预解矩阵的两个表示

(i) $(sI-A)^{-1} \quad = \quad \dfrac{1}{\alpha(s)}(R_{n-1}s^{n-1} + R_{n-2}s^{n-2} + \cdots + R_1 s + R_0)$

其中,

$$\begin{cases} \alpha(s) &= \det(sI-A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 \\ R_{n-1} &= I \\ R_{n-2} &= A + \alpha_{n-1}I \\ \cdots & \ldots \quad \cdots \\ R_0 &= A^{n-1} + \alpha_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \alpha_1 I \end{cases}$$

(ii) $(sI-A)^{-1}=\dfrac{I}{s}+\dfrac{A}{s^2}+\cdots+\dfrac{A^n}{s^{n+1}}+\cdots.$

证明: (i) 由于

$$(sI-A)^{-1} = \frac{adj(sI-A)}{\det(sI-A)}=\frac{R(s)}{\alpha(s)}$$

其中 $R(s)$ 是多项式矩阵, 它的每个元素是 s 的多项式, 而且每个元素多项式的最高幂次均小于 $\alpha(s)$ 的幂次. 这样, 记

$$R(s)=R_{n-1}s^{n-1}+R_{n-2}s^{n-2}+\cdots+R_1s+R_0,$$

其中 $R_0, R_1, \cdots, R_{n-1}$ 是待定的数值矩阵. 由于

$$\alpha(s)I=R(s)(sI-A)=[R_{n-1}s^{n-1}+R_{n-2}s^{n-2}+\cdots+R_1s+R_0](sI-A)$$

所以

$$\begin{aligned}&Is^n+\alpha_{n-1}Is^{n-1}+\cdots+\alpha_1Is+\alpha_0I\\ =\ &R_{n-1}s^n+(R_{n-2}-R_{n-1}A)s^{n-1}+\cdots+(R_0-R_1A)s-R_0A\end{aligned}$$

比较上式两边 $s^i(i=1,2,\ldots,n)$ 的系数矩阵, 可得:

$$R_{n-1}=I,\ R_{n-2}=R_{n-1}A+\alpha_{n-1}I,\ \ldots,\ R_1=R_2A+\alpha_2I,\ R_0=R_1A+\alpha_1I$$

从而, $R_{n-1}=I,\ R_{n-2}=A+\alpha_{n-1}I,\ \ldots,\ R_0=A^{n-1}+\alpha_{n-1}A^{n-2}+\cdots+\alpha_1I.$

(ii) 记 $H(s)=\dfrac{I}{s}+\dfrac{A}{s^2}+\cdots+\dfrac{A^n}{s^{n+1}}+\cdots$, 由于 $(sI-A)$ 是一个非奇异矩阵, 并且,

$$\begin{aligned}&(sI-A)H(s)=H(s)(sI-A)\\ =\ &(I+\frac{A}{s}+\frac{A^2}{s^2}+\cdots+\frac{A^n}{s^n}+\cdots)-(\frac{A}{s}+\frac{A^2}{s^2}+\frac{A^3}{s^3}+\cdots+\frac{A^n}{s^n}+\cdots)=I\end{aligned}$$

由矩阵定义可知 $(sI-A)^{-1}=H(s)=\dfrac{I}{s}+\dfrac{A}{s^2}+\cdots+\dfrac{A^n}{s^{n+1}}+\cdots.$

□

命题 1.2.2 (Caylay-Hamilton **定理**) 设 n 阶矩阵 A 的特征多项式

$$\alpha(s)=\det(sI-A)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1s+\alpha_0, \tag{1.2.2}$$

则 A 满足其特征方程. 即:

$$\alpha(A)=A^n+\alpha_{n-1}A^{n-1}+\cdots+\alpha_1A+\alpha_0I=0. \tag{1.2.3}$$

证明: 由命题 1 可知

$$R(s)(sI-A)=\alpha(s)I, \tag{1.2.4}$$

即,

$$
\begin{aligned}
& s^n R_{n-1} + s^{n-1}(R_{n-2} - R_{n-1}A) + s^{n-2}(R_{n-3} - R_{n-2}A) + \cdots + s(R_0 - R_1 A) - R_0 A \\
= \;& s^n I + \alpha_{n-1} s^{n-1} I + \alpha_{n-2} s^{n-2} I + \cdots + \alpha_1 s I + \alpha_0 I
\end{aligned}
$$

所以, $-\alpha_0 I = R_0 A$. 而 $R_0 = A^{n-1} + \alpha_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \alpha_1 I$, 因此,

$$
A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0.
$$

□

推论 1.2.1 (i) 矩阵 A 的 m $(m \geq n)$ 次幂可表为 A 的 $(n-1)$ 阶多项式,

$$
A^m = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k, \quad (m \geq n) \tag{1.2.5}
$$

其中 a_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, 均与 A 的特征多项式系数有关.

(ii) 矩阵指数函数 e^{At} 可表示为 A 的 $(n-1)$ 阶多项式

$$
e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) A^k. \tag{1.2.6}
$$

其中 $a_k(t), k = 0, 1, \ldots, n-1$, 均为 t 的幂函数.

证明: (i) 当 $m = n$ 时, 由 Caylay-Hamilton 定理可得:

$$
A^n = -\alpha_{n-1}A^{n-1} - \alpha_{n-2}A^{n-2} - \cdots - \alpha_1 A - \alpha_0 I
$$

当 $m = n+1$ 时, 则

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} &= AA^n \\
&= -\alpha_{n-1}A^n - \alpha_{n-2}A^{n-1} - \cdots - \alpha_1 A^2 - \alpha_0 A \\
&= -\alpha_{n-1}(-\alpha_{n-1}A^{n-1} - \alpha_{n-2}A^{n-2} - \cdots - \alpha_1 A - \alpha_0 I) - \alpha_{n-2}A^{n-1} - \cdots - \alpha_1 A^2 - \alpha_0 A \\
&= (\alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-2})A^{n-1} + (\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} - \alpha_{n-3})A^{n-2} + \ldots \\
&\quad +(\alpha_{n-1}\alpha_2 - \alpha_1)A^2 + (\alpha_{n-1}\alpha_1 - \alpha_0)A + \alpha_{n-1}\alpha_0 I
\end{aligned}
$$

由归纳法可知结论成立.

(ii) 事实上，由上述 (i) 的结论可得

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}t^{n-1} + \frac{1}{n!}A^nt^n + \frac{1}{(n+1)!}A^{n+1}t^{n+1} + \ldots \\
&= I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}t^{n-1} \\
&\quad + \frac{1}{n!}(-\alpha_{n-1}A^{n-1} - \alpha_{n-2}A^{n-2} - \cdots - \alpha_1 A - \alpha_0 I)t^n \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!}[(\alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-2})A^{n-1} + (\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} - \alpha_{n-3})A^{n-2} + \ldots \\
&\quad + (\alpha_{n-1}\alpha_2 - \alpha_1)A^2 + (\alpha_{n-1}\alpha_1 - \alpha_0)A + \alpha_{n-1}\alpha_0 I]t^{n+1} + \ldots \\
&= a_0(t)I + a_1(t)A + a_2(t)A^2 + \cdots + + a_{n-1}(t)A^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)A^k.
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{cases}
a_0(t) = 1 - \frac{1}{n!}\alpha_0 t^n + \frac{1}{(n+1)!}\alpha_{n-1}\alpha_0 t^{n+1} - \ldots \\
a_1(t) = t - \frac{1}{n!}\alpha_1 t^n + \frac{1}{(n+1)!}(\alpha_{n-1}\alpha_1 - \alpha_0)t^{n+1} - \ldots \\
a_2(t) = \frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{n!}\alpha_2 t^n + \frac{1}{(n+1)!}(\alpha_{n-1}\alpha_2 - \alpha_1)t^{n+1} - \ldots \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
a_{n-1}(t) = \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} - \frac{1}{n!}\alpha_{n-1}t^n + \frac{1}{(n+1)!}(\alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-2})t^{n+1} - \ldots.
\end{cases}
\tag{1.2.7}
$$

□

§1.3 控制系统不同表示的转化与组合

§ 1.3.1 化系统的输入输出微分方程模型为状态空间表示

这部分的讨论仅限于单输入单输出的线性定常系统. 将系统的输入输出微分方程模型转化为状态空间表示，其目的是使我们对系统的不同描述间的关系有更为直观的了解.

1. 系统输入量不含导数项

这种单输入单输出线性定常连续系统的微分方程具有如下形式：

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = \beta_0 u(t) \tag{1.3.1}$$

其中 y, u 分别为系统输出输入量， $a_0, \ldots, a_{n-1}, \beta_0$ 是由系统特性确定的常系数. 由于当给定 n 个初值 $y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$ 及 $t \geq 0$ 的 $u(t)$ 时，可唯一确定 $t > 0$ 时系统的行为，因此由状态变

量的定义可选取如下 n 个状态变量： $x_1(t)=y(t),x_2(t)=\dot{y}(t),\cdots,x_n(t)=y^{(n-1)}(t)$. 故 (1.3.1) 可化为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) & = & x_2(t),\\ \dot{x}_2(t) & = & x_3(t),\\ \cdots & \cdots & \cdots,\\ \dot{x}_{n-1}(t) & = & x_n(t),\\ \dot{x}_n(t) & = & -a_0x_1(t)-a_1x_2(t)-\cdots-a_{n-1}x_n(t)+\beta_0u(t),\\ y(t) & = & x_1(t),\end{cases} \tag{1.3.2}$$

其向量 - 矩阵形式为：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),y(t)=Cx(t), \tag{1.3.3}$$

其中：

$$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_{n-1}(t)\\ x_n(t)\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \beta_0\end{pmatrix},C=(1,0,\dots,0).$$

例 1.3.1 设系统的微分方程为 $\dddot{y}(t)+5\ddot{y}(t)+13\dot{y}(t)+7y(t)=6u(t)$, 求系统的状态空间表示.

解：选取 $y(t),\dot{y}(t),\ddot{y}(t)$ 为状态变量，令 $x_1(t)=y(t),x_2(t)=\dot{y}(t),x_3(t)=\ddot{y}(t)$, 则由系统的微分方程得状态空间表达式，即

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) & = & x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) & = & x_3(t)\\ \dot{x}_3(t) & = & -7x_1(t)-13x_2(t)-5x_3(t)+6u(t)\\ y(t) & = & x_1(t)\end{cases}$$

因此，该系统的向量 - 矩阵形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -7 & -13 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 6\end{pmatrix}u(t)\\ y(t) & = & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}\end{cases}$$

$\square$

2. **系统输入量中含有导数项**

这种单输入单输出线性定常连续系统的微分方程具有如下形式:

$$\begin{aligned} & y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+a_{n-2}y^{(n-2)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t) \\ = \ & b_nu^{(n)}(t)+b_{n-1}u^{(n-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t), \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

一般输入导数项的次数小与或等于系统的阶数 n, 首先研究 $b_n\neq 0$ 的情况.

方法一 为了避免在状态方程中出现输入的导数项，通常可利用输出 $y(t)$ 和输入 $u(t)$ 以及它们的各阶导数的线性组合组成状态向量，其原则是使得状态方程不显含输入 $u(t)$ 的各项导数. 基于这种原则，可按如下规则选择一组状态变量. 设

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t)-h_0u(t), \\ x_i(t) = \dot{x}_{i-1}(t)-h_{i-1}u(t), \quad i=2,3,\ldots,n, \end{cases} \tag{1.3.5}$$

其展开式为:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t)-h_0u(t), \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t)-h_1u(t) = \dot{y}(t)-h_0\dot{u}(t)-h_1u(t), \\ x_3(t) = \dot{x}_2(t)-h_2u(t) = \ddot{y}(t)-h_0\ddot{u}(t)-h_1\dot{u}(t)-h_2u(t), \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \\ x_{n-1}(t) = \dot{x}_{n-2}(t)-h_{n-2}u(t) = y^{(n-2)}(t)-h_0u^{(n-2)}(t)-h_1u^{(n-3)}(t)-\cdots-h_{n-2}u(t), \\ x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t)-h_{n-1}u(t) = y^{(n-1)}(t)-h_0u^{(n-1)}(t)-h_1u^{(n-2)}(t)-\cdots-h_{n-2}\dot{u}(t)-h_{n-1}u(t), \end{cases} \tag{1.3.6}$$

其中 $h_0,h_1,\ldots,h_{n-1}$ 是 n 个待定常数, 由 (1.3.6) 的第一个方程可得输出方程. 其余可得下列 $(n-1)$ 个状态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t)+h_1u(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t)+h_2u(t), \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t)+h_{n-1}u(t). \end{cases}$$

对 (1.3.6) 中的最后一项 x_n 求导数，并将 (1.3.4) 式代入可得:

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) &= y^{(n)}(t)-h_0u^{(n)}(t)-h_1u^{(n-1)}(t)-\cdots-h_{n-1}\dot{u}(t) \\ &= (-a_{n-1}y^{(n-1)}(t)-a_{n-2}y^{(n-2)}(t)-\cdots-a_1\dot{y}(t)-a_0y(t)+b_nu^{(n)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t)) \\ &\quad -h_0u^{(n)}(t)-h_1u^{(n-1)}(t)-\cdots-h_{n-1}\dot{u}(t), \end{aligned}$$

由 (1.3.6) 式将 $y^{(n-1)}(t),\ldots,\dot{y}(t),y(t)$ 均以 $x_i(t)$ 及 $u(t)$ 的各阶导数表示，经整理可得：

$$\begin{aligned}\dot{x}_n(t) &= -a_0x_1(t)-a_1x_2(t)-\cdots-a_{n-2}x_{n-1}(t)-a_{n-1}x_n(t)+(b_n-h_0)u^{(n)}(t)\\ &\quad +(b_{n-1}-h_1-a_{n-1}h_0)u^{n-1}(t)+(b_{n-2}-h_2-a_{n-1}h_1-a_{n-2}h_0)u^{(n-2)}(t)\\ &\quad +\cdots+(b_1-h_{n-1}-a_{n-1}h_{n-2}-a_{n-2}h_{n-3}-\cdots-a_1h_0)\dot{u}(t)\\ &\quad +(b_0-a_{n-1}h_{n-1}-a_{n-2}h_{n-2}-\cdots-a_1h_1-a_0h_0)u(t).\end{aligned}$$

令上式中各阶导数项系数为零，可确定各 h 值：

$$\left\{\begin{array}{lcl} h_0 &=& b_n,\\ h_1 &=& b_{n-1}-a_{n-1}h_0,\\ h_2 &=& b_{n-2}-a_{n-1}h_1-a_{n-2}h_0,\\ \cdots &\cdots& \cdots,\\ h_{n-1} &=& b_1-a_{n-1}h_{n-2}-a_{n-2}h_{n-3}-\cdots-a_1h_0, \end{array}\right. \tag{1.3.7}$$

记：

$$h_n=b_0-a_{n-1}h_{n-1}-a_{n-2}h_{n-2}-\cdots-a_1h_1-a_0h_0,$$

故：

$$\dot{x}_n(t)=-a_0x_1(t)-a_1x_2(t)-\cdots-a_{n-2}x_{n-1}(t)-a_{n-1}x_n(t)+h_nu(t).$$

这样 (1.3.4) 的向量 – 矩阵形式为：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\ \ y(t)=Cx(t)+Du(t), \tag{1.3.8}$$

其中：

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\ldots&0\\0&0&1&\ldots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\ldots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\ldots&-a_{n-1}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\ \vdots\\h_{n-1}\\h_n\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0&\ldots&0\end{pmatrix},D=h_0.$$

方法二 对系统微分方程 (1.3.4) 引入微分算子

$$\left\{\begin{array}{lcl} p^n &=& \dfrac{d^n}{dt^n}+a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\dfrac{d}{dt}+a_0\\ q^n &=& b_n\dfrac{d^n}{dt^n}+b_{n-1}\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\cdots+b_1\dfrac{d}{dt}+b_0 \end{array}\right.$$

将 p^n, q^n 分别作用在 (1.3.4) 的左、右端有 $p^n y(t) = q^n u(t)$. 再引入中间变量 $z(t)$, 令

$$u(t) = z^{(n)}(t) + a_{n-1}z^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{z}(t) + a_0 z(t) = p^n z(t)$$

则， $p^n y(t) = q^n u(t) = q^n \cdot p^n z(t)$, 因此

$$y(t) = q^n z(t) = b_n z^{(n)}(t) + b_{n-1}z^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1\dot{z}(t) + b_0 z(t)$$

于是微分方程 (1.3.4) 式可被分解为如下两个方程

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(t) & = & z^{(n)}(t) + a_{n-1}z^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{z}(t) + a_0 z(t) \\ y(t) & = & b_n z^{(n)}(t) + b_{n-1}z^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1\dot{z}(t) + b_0 z(t) \end{array}\right.$$

因此选择系统的状态变量为

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & z(t) \\ x_2(t) & = & \dot{z}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-1}(t) & = & z^{(n-2)}(t) \\ x_n(t) & = & z^{(n-1)}(t) \end{array}\right.$$

则系统的状态方程为

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & x_3(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) & = & x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) & = & -a_{n-1}x_n(t) - a_{n-2}x_{n-1}(t) - \cdots - a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + u(t) \end{array}\right.$$

输出方程为

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & b_n(-a_{n-1}x_n(t) - a_{n-2}x_{n-1}(t) - \cdots - a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + u(t)) \\ & & +b_{n-1}x_n(t) + \cdots + b_1 x_2(t) + b_0 x_1(t) \\ & = & (b_{n-1} - a_{n-1}b_n)x_n(t) + (b_{n-2} - a_{n-2}b_n)x_{n-1}(t) + \cdots + (b_1 - a_1 b_n)x_2(t) \\ & & +(b_0 - a_0 b_n)x_1(t) + b_n u(t) \end{array}$$

所以 (1.3.4) 的向量 - 矩阵形式为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} b_0 - a_0 b_n, & b_1 - a_1 b_n, & \cdots, & b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix} + b_n u(t) \end{cases} \tag{1.3.9}$$

以上为 $b_n \neq 0$ 的情形.

若 $b_n = 0$, 即输入量中仅含 m 次导数且 $m < n$, 此时可以将高于 m 次导数项的系数设置为零，再应用上述公式，也可按如下规则选择另一组状态变量，设：

$$\begin{cases} x_n(t) = y(t), \\ x_i(t) = \dot{x}_{i+1}(t) + a_i y(t) - b_i u(t), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \end{cases} \tag{1.3.10}$$

其展开式为：

$$\begin{cases} x_{n-1}(t) = \dot{x}_n(t) + a_{n-1}y(t) - b_{n-1}u(t) = \dot{y}(t) + a_{n-1}y(t) - b_{n-1}u(t), \\ x_{n-2}(t) = \dot{x}_{n-1}(t) + a_{n-2}y(t) - b_{n-2}u(t) = \ddot{y}(t) + a_{n-1}\dot{y}(t) - b_{n-1}\dot{u}(t) + a_{n-2}y(t) - b_{n-2}u(t), \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \\ x_2(t) = \dot{x}_3(t) + a_2 y(t) - b_2 u(t), \\ \qquad = y^{(n-2)}(t) + a_{n-1}y^{(n-3)}(t) - b_{n-1}u^{(n-3)}(t) + a_{n-2}y^{(n-4)}(t) \\ \qquad\quad -b_{n-2}u^{(n-4)}(t) \cdots + a_2 y(t) - b_2 u(t), \\ x_1(t) = \dot{x}_2(t) + a_1 y(t) - b_1 u(t), \\ \qquad = y^{(n-1)}(t) + a_{n-1}y^{(n-2)}(t) - b_{n-1}u^{(n-2)}(t) + a_{n-2}y^{(n-3)}(t) \\ \qquad\quad -b_{n-2}u^{(n-3)}(t) + \cdots + a_1 y(t) - b_1 u(t), \end{cases}$$

故有 $(n-1)$ 个状态方程：

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) &= x_{n-1}(t) - a_{n-1}x_n(t) + b_{n-1}u(t), \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_{n-2}(t) - a_{n-2}x_n(t) + b_{n-2}u(t), \\ \cdots & \cdots \ \cdots, \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - a_1x_n(t) + b_1u(t). \end{cases}$$

对 $x_1(t)$ 求导，并将 (1.3.4) 式代入，经整理有：

$$\dot{x}(t) = -a_0x_n(t) + b_0u(t).$$

于是 (1.3.4) 式中 $b_n = 0$ 时的向量矩阵形式为：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t), \tag{1.3.11}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

例 1.3.2 已知系统的微分方程为 $\dddot{y}(t) + 6\ddot{y}(t) + 11\dot{y}(t) + 6y(t) = \ddot{u}(t) + 9\dot{u}(t) + 4u(t)$, 试写出系统的状态空间表达式.

解: 方法一 由微分方程可知各项系数为 $a_2 = 6, a_1 = 11, a_0 = 6, b_3 = 0, b_2 = 1, b_1 = 9, b_0 = 4$, 则由 (3.7) 式可确定

$$\begin{cases} h_0 &= b_3 = 0 \\ h_1 &= b_2 - a_2h_0 = 1 \\ h_2 &= b_1 - a_2h_1 - a_1h_0 = 3 \\ h_3 &= b_0 - a_2h_2 - a_1h_1 - a_0h_0 = -25 \end{cases}$$

所以系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} u(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -25 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + h_0u(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

方法二 由微分方程可知各项系数为 $a_2=6, a_1=11, a_0=6, b_3=0, b_2=1, b_1=9, b_0=4$, 所以由 (3.9) 式可知系统的状态表达式为

$$\left\{\begin{array}{lcl}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}u(t)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}u(t)\\ y(t) & = & \begin{pmatrix}b_0-a_0b_3, & b_1-a_1b_3, & b_2-a_2b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}+b_3u(t)=\begin{pmatrix}4 & 9 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

□

作业：

1. 已知控制系统的状态方程为 $\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+6y(t)=u(t)$, 写出系统的状态空间表达式。

答案：

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t),\quad y(t)\ =\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}$$

2. 已知控制系统的微分方程式为 $\dddot{y}(t)+9\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+3y(t)=\ddot{u}(t)+4\dot{u}(t)+u(t)$, 写出系统的状态空间表达式.

答案：

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -5 & -9\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}1\\ -5\\ 41\end{pmatrix}u(t), y(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}x(t).$$

§ 1.3.2 化系统的状态空间表示为系统的传递函数矩阵描述

对于多输入多输出线性定常系统，传递函数矩阵是表征系统输入 - 输出特性的最基本的形式. 本节中，我们从系统的状态空间描述出发来导出系统的传递函数矩阵. 也就是说，从另一个角度来揭示状态空间描述和输入 - 输出描述间的关系. 但是，这两种描述间的更为深刻的关系，只有在研究了系统的能控性和能观测性之后才能得到完全的揭示.

1. 线性定常系统的传递函数矩阵

定理 1.3.1 对于线性定常系统

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}(t) & = & Ax(t)+Bu(t),\quad x(0)=0\\ y(t) & = & Cx(t)+Du(t)\end{array}\right.$$

(i) 其传递函数矩阵为：

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

(ii) 传递函数矩阵在等价变换下保持不变.

证明: (i) 对于线性定常系统的状态方程 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ 两边进行 Laplace 变换可得：

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s).$$

考虑到零初始状态以及上式两边乘以 $(sI - A)^{-1}$ ，可得

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s), \tag{1.3.12}$$

再对输出方程： $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ 两边进行 Laplace 变换可得

$$Y(s) = CX(s) + DU(s), \tag{1.3.13}$$

将 (1.3.12) 代入 (1.3.13) 可得：

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s).$$

另一方面，传递函数矩阵 $G(s)$ 满足 $Y(s) = G(s)U(s)$, 因此：

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

(ii) 令系统在不同坐标系下的传递函数矩阵分别为：

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad \text{和} \quad \bar{G}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D},$$

且有

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \bar{B} = TB, \bar{C} = CT^{-1}, \bar{D} = D$$

于是，可导出：

$$\begin{aligned}
\bar{G}(s) &= CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB + D \\
&= C[T^{-1}(sI - TAT^{-1})T]^{-1}B + D \\
&= C(sI - A)^{-1}B + D \\
&= G(s).
\end{aligned}$$

□

这个结论在物理上的含义是：当系统的输入和输出变量被确定后，不论如何选取状态变量组，系统的输出 - 输入特性将总是相同的. 从数学上看，则表明所有代数等价的状态空间描述均具有等同的输入 - 输出特性.

例 1.3.3 假设如图所示的机械系统起初处于静止平衡状态，系统输入为作用力 F_1 和 F_2, 输出为 y_1 和 y_2, 试求系统的传递函数矩阵.

解：按图对质点 m_1 和 m_2 分别可写出如下微分方程

$$\begin{cases} m_1\dfrac{d^2y_1(t)}{dt^2}+f_1\dfrac{d(y_1(t)-y_2(t))}{dt}+k_1y_1(t)= & F_1 \\ m_2\dfrac{d^2y_2(t)}{dt^2}+f_1\dfrac{d(y_2(t)-y_1(t))}{dt}+k_2y_2(t)= & F_2 \end{cases}$$

对以上两式进行拉普拉斯变换，并设初始条件为零，则有

$$\begin{cases} (m_1s^2+fs+k_1)Y_1(s)-fsY_2(s) & = & F_1(s) \\ (m_2s^2+fs+k_2)Y_2(s)-fsY_1(s) & = & F_2(s) \end{cases}$$

将上式写成矩阵形式，可得

$$\begin{pmatrix} m_1s^2+fs+k_1 & -fs \\ -fs & m_2s^2+fs+k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{pmatrix}$$

因此，该系统的传递矩阵为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m_1s^2+fs+k_1 & -fs \\ -fs & m_2s^2+fs+k_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{pmatrix} \\ G(s)= & \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} m_2s^2+fs+k_2 & fs \\ fs & m_1s^2+fs+k_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(2) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中， $\Delta=(m_1s^2+fs+k_1)(m_2s^2+fs+k_2)-f^2s^2$.

□

2. **传递函数矩阵 $G(s)$ 的实用计算关系式**

上述定理 1.3.1 建立了传递函数矩阵 $G(s)$ 和状态空间描述的系数矩阵之间的关系，它在理论分析上是很重要的，但从计算的角度而言常常不很方便，特别是采用数字计算机时尤其如此. 下面，我们来给出一个计算 $G(s)$ 的实用等式.

定理 1.3.2 对于给定状态空间描述的系数矩阵 $\{A,B,C,D\}$, 求出

$$\alpha(s)=\det(sI-A)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1s+\alpha_0 \tag{1.3.14}$$

和

$$\begin{cases} E_{n-1} &= CB \\ E_{n-2} &= CAB+\alpha_{n-1}CB \\ \cdots & \cdots\ \cdots \\ E_1 &= CA^{n-2}B+\alpha_{n-1}CA^{n-3}B+\cdots+\alpha_2 CB \\ E_0 &= CA^{n-1}B+\alpha_{n-1}CA^{n-2}B+\cdots+\alpha_2 CAB+\alpha_1 CB \end{cases} \tag{1.3.15}$$

则相应的传递函数矩阵可按下式来确定：

$$G(s)=\frac{1}{\alpha(s)}(E_{n-1}s^{n-1}+E_{n-2}s^{n-2}+\cdots+E_1 s+E_0)+D. \tag{1.3.16}$$

证明：由命题 1.2.1 可知，$(sI-A)^{-1}=\dfrac{1}{\alpha(s)}(R_{n-1}s^{n-1}+R_{n-2}s^{n-2}+\cdots+R_1 s+R_0)$, 其中，$R_{n-1}=I$, $R_{n-2}=A+\alpha_{n-1}I$, $\ldots$, $R_0=A^{n-1}+\alpha_{n-1}A^{n-2}+\cdots+\alpha_1 I$. 于是,

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=\frac{1}{\alpha(s)}(CR_{n-1}Bs^{n-1}+CR_{n-2}Bs^{n-2}+\cdots+CR_1 Bs+CR_0 B)+D.$$

令

$$E_{n-1}=CR_{n-1}B, E_{n-2}=CR_{n-2}B,\ldots,E_1=CR_1 B, E_0=CR_0 B,$$

代入上式可得 (1.3.16) 式. 并且，(1.3.15) 式也显然成立.

□

例 1.3.4 给定线性定常系统为：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} x(t)+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (1\quad 1\quad 2)x(t) \end{cases},$$

求系统的传递函数矩阵 $G(s)$.

解：先解出系统的特征多项式,

$$\alpha(s)=\det(sI-A)=(s-2)^2(s-1)=s^3-5s^2+8s-4,$$

再计算系数矩阵：

$$E_2=CB=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = CAB + \alpha_2 CB = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix} + (-5)(8 \quad 4) = (-24 \quad -14)$$

$$\begin{aligned}E_0 &= CA^2B + \alpha_2 CAB + \alpha_1 CB\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 3 & 1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix} + (-5)\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix}8 & 4\end{pmatrix}\\ &= (16 \quad 12)\end{aligned}$$

从而，所求传递函数矩阵为：

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{1}{\alpha(s)}(E_2s^2 + Es + E_0)\\ &= \left(\ \frac{8s^2-24s+16}{s^3-5s^2+8s-4}\ ,\quad \frac{4s^2-14s^1+12}{s^3-5s^2+8s-4}\ \right)\end{aligned}$$

□

注记：传递函数 (矩阵) 和状态空间表达式两种模型之间是可以互相转换的．在这里我们讨论了从系统的状态空间表达式求传递函数 (矩阵) 的问题．反之，从传递函数 (矩阵) 求系统的状态空间表达式的问题，这就是系统的实现问题．由于系统的实现不是唯一的，而且实现问题的研究倚赖于系统的结构以及能控性和能观测性问题，我们将放在第三章第四节中讨论．

§ 1.3.3 **组合系统的状态空间表示**

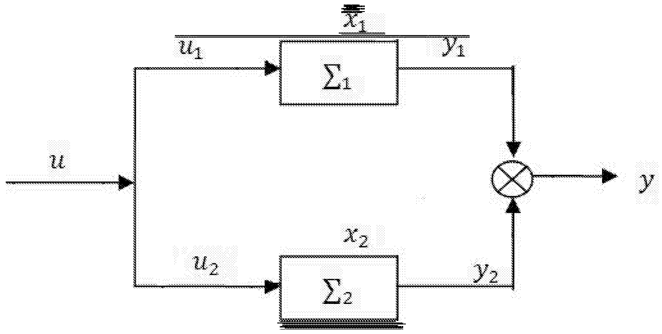
由两个或两个以上的子系统按一定方式联接构成的系统称为组合系统．组合的基本方式可以分为串联、并联和反馈三种类型，一个比较复杂的实际系统常常就是包含几种联接方式的一个组合系统．下面，对于上述三种基本组合方式给出相应的组合系统的状态空间表示．

1. **子系统的并联**

考虑由两个子系统

$$\Sigma_i : \begin{cases}\dot{x}_i(t) &= A_ix_i(t) + B_iu_i(t),\\ y_i(t) &= C_ix_i(t) + D_iu_i(t), \quad (i = 1, 2)\end{cases}$$

经并联构成的组合系统 Σ_p.



从图中可以看出，两个子系统可进行并联的条件为：

$$\dim(u_1(t)) = \dim(u_2(t)),\ \dim(y_1(t)) = \dim(y_2(t)),$$

其中 $dim(\cdot)$ 表示向量 $(\cdot)$ 的维数，并且在实现了并联后系统在变量上的特点为：

$$u_1(t) = u_2(t) = u(t),\ y_1(t) + y_2(t) = y(t).$$

于是，对并联组合系统可导出其动态方程为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + B_1 u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= A_2 x_2(t) + B_2 u(t), \\ y(t) &= C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + (D_1 + D_2) u(t). \end{cases}$$

若用 $(x_1(t), x_2(t))^T$ 表示组合系统的状态，则上述并联组合系统 Σ_p 的状态空间描述为：

$$\Sigma_p : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \end{pmatrix} u(t). \end{cases}$$

进一步，可以推广讨论由 N 个子系统并联构成的组合系统．通过与上述相类似的推导，可将并联组合系统 Σ_p 的状态空间描述为：

$$\Sigma_p : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_N \end{pmatrix} u(t). \end{cases}$$

如果子系统 $\Sigma_i(i=1,2,\cdots,N)$ 的传递函数矩阵为：

$$G_i(s)=C_i(sI-A_i)^{-1}B_i+D_i,\quad i=1,2,\ldots,N,$$

那么，利用 $u_1=u_2=\cdots=u_N$ 和 $y=y_1+y_2+\cdots+y_N$, 就可导出并联组合系统的传递函数矩阵. 由于

$$\bar{y}(s)=\bar{y_1}(s)+\bar{y_2}(s)+\cdots+\bar{y}_N(s)=G_1(s)U(s)+\cdots+G_N(s)U(s)=G(s)U(s),$$

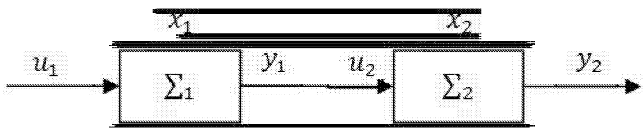
所以

$$G(s)=\sum_{i=1}^{N}G_i(s).$$

2. **子系统的串联**

考虑两个子系统 Σ_1 与 Σ_2 经由图示串联构成的组合系统 $\Sigma_1-\Sigma_2$, 从图中可以看出两个子系统可以进行串联联接的条件为

$$\dim(y_1(t))=\dim(u_2(t)).$$



而在实现 $\Sigma_1-\Sigma_2$ 顺序的串联联接后组合系统在变量上的特点为：

$$u(t)=u_1(t),u_2(t)=y_1(t),y_2(t)=y(t).$$

于是，对串联组合系统 $\Sigma_1-\Sigma_2$ 可导出其动态方程为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) &= A_1x_1(t)+B_1u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= B_2C_1x_1(t)+A_2x_2(t)+B_2D_1u(t)\\ y(t) &= D_2C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+D_2D_1u(t)\end{cases}$$

若用 $(x_1(t),x_2(t))^T$ 表示组合系统的状态，则上述串联组合系统 $\Sigma_1-\Sigma_2$ 的状态空间描述为：

$$\Sigma_1-\Sigma_2:\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1 & 0\\ B_2C_1 & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_1\\ B_2D_1\end{pmatrix}u(t),\\ y(t) = \begin{pmatrix}D_1C_1 & C_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}D_1D_2\end{pmatrix}u(t).\end{cases}$$

进一步，可以推广讨论由 N 个子系统顺序串联构成的组合系统的状态空间描述，但其形式相当复杂.

如果子系统 $\Sigma_i(i=1,2,\ldots,N)$ 的传递函数矩阵为：

$$G_i(s)=C_i(sI-A_i)^{-1}B_i+D_i,\quad i=1,2,\ldots,N,$$

那么，利用 $u_1=u,u_2=y_1,\ldots,u_N=y_{N-1},y_N=y$, 就可导出串联组合系统的传递函数矩阵. 由于

$$\begin{aligned}\bar{y}(s)&=G_N(s)U_N(s)=G_N(s)\bar{y}_{N-1}(s)=G_N(s)G_{N-1}(s)U_{N-1}(s)\\&=\cdots=G_N(s)\cdots G_1(s)U_1(s)=G(s)U(s),\end{aligned}$$

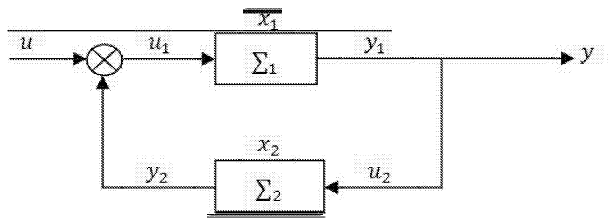
所以

$$G(s)=G_N(s)G_{N-1}(s)\ldots G_1(s).$$

3. **子系统的反馈联接**

考虑两个子系统 Σ_1 与 Σ_2 经由图示的方式构成的反馈系统 Σ_f, 从图中可以看出，两个子系统可以进行反馈联接的条件为：

$$\dim(u_1(t))=\dim(y_2(t)),\ \dim(u_2(t))=\dim(y_1(t)).$$



而实现反馈联接后组合系统 Σ_f 在变量上的特点为：

$$u_1(t)=u(t)-y_2(t),\quad y_1(t)=y(t)=u_2(t).\tag{1.3.17}$$

为了使反馈联接后的系统 Σ_f 的状态空间描述的形式不至于过分复杂，假定 $D_i=0,\ (i=1,2)$. 于是，反馈系统 Σ_f 可导出其动态方程为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)&=&A_1x_1(t)+B_1u(t)-B_1C_2x_2(t)\\\dot{x}_2(t)&=&A_2x_2(t)+B_2C_1x_1(t)\\y(t)&=&C_1x_1(t)\end{cases}$$

若用 $(x_1(t),x_2(t))^T$ 表示反馈系统 Σ_f 的状态，则反馈系统 Σ_f 的状态空间描述为：

$$\Sigma_f:\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1 & -B_1C_2\\ B_2C_1 & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_1\\ 0\end{pmatrix}u(t)\\ y(t) = \begin{pmatrix}C_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}\end{cases}$$

下面，来推导反馈系统 Σ_f 的传递函数矩阵的表达式．若子系统 $\Sigma_i(i=1,2)$ 的传递函数矩阵为：

$$G_i(s)=C_i(sI-A_i)^{-1}B_i,\ \ i=1,2,$$

由 (1.3.17) 式可得：

$$\begin{aligned}y(s) &= y_1(s)=G_1(s)u_1(s)\\ &= G_1(s)[u(s)-G_2(s)u_2(s)]\\ &= G_1(s)[u(s)-G_2(s)y(s)]\\ &= G_1(s)u(s)-G_1(s)G_2(s)y(s)\end{aligned}$$

所以

$$[I+G_1(s)G_2(s)]y(s)=G_1(s)u(s).$$

若 $\det(I+G_1(s)G_2(s))\neq 0$, 那么可得到反馈系统的传递函数矩阵为：

$$G(s)=[I+G_1(s)G_2(s)]^{-1}G_1(s).$$

另一方面，由 $(***)$ 式可得：

$$\begin{aligned}u_1(s) &= u(s)-y_2(s)=u(s)-G_2(s)u_2(s)\\ &= u(s)-G_2(s)y_1(s)=u(s)-G_2(s)G_1(s)u_1(s)\end{aligned}$$

所以

$$[I+G_2(s)G_1(s)]u_1(s)=u(s).$$

若 $\det(I+G_2(s)G_1(s))\neq 0$, 由

$$y(s)=y_1(s)=G_1(s)u_1(s)=G_1(s)[I+G_2(s)G_1(s)]^{-1}u(s)$$

可得反馈系统的传递函数矩阵的另一种表达式：

$$G(s)=G_1(s)[I+G_2(s)G_1(s)]^{-1}.$$

§1.4 离散控制系统

§ 1.4.1 离散系统的基本概念

近年来，由于脉冲技术、数字式元部件、数字计算机，特别是微处理机的广泛使用使得数字控制器变得越来越重要. 基于工程实践的需要，作为分析与设计数字控制系统的理论基础，离散控制系统理论得到迅速发展.

$$\text{控制系统}\begin{cases}\text{连续系统}\\ \text{离散系统}\begin{cases}\text{采样控制系统 (或脉冲控制系统、周期采样系统、随机采样系统)}\\ \text{数字控制系统 (或计算机控制系统)}\end{cases}\end{cases}$$

连续系统：如果控制系统中的所有信号都是时间变量的连续函数，也就是说，这些信号在全部时间上都是已知的，则这样的系统称为连续时间系统，简称连续系统.

离散系统：如果控制系统中有一处或几处信号是一串脉冲或数码，也就是说，这些信号仅定义在离散时间上，则这样的系统称为离散时间系统，简称离散系统.

采样控制系统:(脉冲控制系统) 在离散系统中的离散信号是脉冲序列形式的.

一般说来，采样系统是对来自传感器的连续信息在某些规定的时间瞬时上取值. 例如，控制系统中的误差信号可以是断续形式的脉冲信号，而相邻两个脉冲之间的误差信息，系统并没有收到.

$$\text{采样系统}\begin{cases}\text{周期采样系统：如果在有规律的间隔上，系统取到了离散信息}\\ \text{随机采样系统 (非周期采样系统): 如果离散信息之间的间隔是时变的或随机的}\end{cases}$$

在现代技术中，采样系统有许多实际的应用. 例如，雷达跟踪系统，分时系统 (即其数据传输域在几个系统中按时间分配以降低信息传输费用). 在工业控制过程中，如炉温采样控制系统等.

$$\text{采样信号 } e^*(t) \text{ 的数学描述}\begin{cases}\text{采样信号的 Laplace 变换}\\ \text{采样信号的频谱}\end{cases}$$

采样信号

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t) = e(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t-nT)$$

对 $e^*(t)$ 进行 Laplace 变换可得：

$$E^*(s) = \pounds(e^*(t)) = \pounds[\sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t-nT)] = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\pounds[\delta(t-nT)]$$

由 Laplace 变换的位移定理可得

$$\pounds[\delta(t-nT)] = e^{-nTs}\int_0^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt = e^{-nTs}$$

所以，采样 Laplace 变换为

$$E^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)e^{-nTs}.$$

数字控制系统 (计算机控制系统): 在离散系统中的离散信号是数字序列形式

数字控制系统是一种以数字计算机为控制器去控制具有连续工作状态的被控对象的闭环控制系统. 因此, 数字控制系统包括工作于离散状态下的数字计算机和工作于连续状态下的被控对象两大部分. 由于数字控制系统具有一系列的优越性, 所以在军事、航空及工业过程控制中都有广泛的应用.

离散系统的研究方法: 由于离散系统中存在脉冲或数字信号, 如果仍然沿用连续系统中的 Laplace 变换方法来建立系统各个环节的传递函数, 则在运算过程中会出现复变量 s 的超越函数. 为了克服这个障碍, 需要采用 $z-$ 变换法建立离散系统的数学模型. 下面, 我们将会看到通过 $z-$ 变换处理后的离散系统可以把用于连续系统中的许多方法：如稳定性分析、稳态误差计算、时间响应及系统校正方法等, 经过适当改变后直接应用于离散系统的分析和设计中.

§ 1.4.2 离散系统的数学模型

为了研究离散系统的性质, 需要建立离散系统的数学模型. 与连续系统的数学模型类似, 线性离散系统的数学模型有三种：差分方程、脉冲传递函数、离散状态空间表达式.

1. 离散系统的定义

在离散时间系统理论中所涉及的数字信号总是以序列的形式出现, 因此, 可以把离散系统抽象定义为如下形式.

定义 1.4.1 将输入序列 $u(n),\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$, 变换为输出序列 $y(n)$ 的一种变换关系, 称为离散系统, 记为

$$y(n)=F(u(n)).$$

其中 $u(n)$ 和 $y(n)$ 可以理解为 $t=nT$ 时, 系统的输入序列 $u(nT)$ 和输出序列 $y(nT)$, T 为采样周期.

如果在 $y(n)=F(u(n))$ 中的变量关系是线性的, 则称系统为线性离散系统. 如果变换关系是非线性的, 则称为非线性离散系统. 对于线性离散系统而言, $y(n)=F(u(n))$ 满足线性叠加原理. 即, 对任意常数 a,b,

$$F(au_1(n)\pm bu_2(n))=aF(u_1(n))\pm bF(u_2(n)).$$

当系统的输入与输出关系不随时间而改变时, 称系统为线性定常离散系统. 此时, 当输入序列为 $u(n)$ 时, 输出序列为 $y(n)$. 如果输入序列变为 $u(n-k)$ 时, 相应的输出序列变为 $y(n-k)$, 其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

2. **线性定常离散系统的差分方程**

线性定常离散系统可以用线性定常差分方程来描述. 事实上, 对于一般的线性定常离散系统, k 时刻的输出 $y(k)$ 不但与 k 时刻的输入 $u(k)$ 有关, 而且与 k 时刻以前的输入 $u(k-1),u(k-2),\cdots$ 以及 k 时刻以前的输出 $y(k-1),y(k-2),\cdots$ 均有关. 因此, 这种关系可以用下列 n 阶后向差分方程描述

$$\begin{aligned} & y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\cdots+a_{n-1}y(k-n+1)+a_ny(k-n) \\ = \ & b_0u(k)+b_1u(k-1)+\cdots+b_{m-1}u(k-m+1)+b_mu(k-m) \end{aligned}$$

即

$$y(k)=-\sum_{i=1}^{n}a_iy(k-i)+\sum_{j=0}^{m}b_ju(k-j), \tag{1.4.1}$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $b_j(j=0,1,2,\cdots,m)$ 均为常数, $m\le n$. 称方程 (1.4.1) 为 n 阶后向差分方程.

当然, 线性定常离散系统也可以用如下的 n 阶前向差分方程来描述, 即

$$y(k+n)=-\sum_{i=1}^{n}a_iy(k+n-i)+\sum_{j=0}^{m}b_ju(k+m-j). \tag{1.4.2}$$

通常, 常系数线性差分方程的解法 $\begin{cases} \text{经典法,} \\ \text{迭代法,} \\ \text{z- 变换法.} \end{cases}$

经典法 求出对应的齐次方程的通解和非齐次方程的一个特解.

迭代法 若已知差分方程 (1.4.1) 或 (1.4.2), 对于给定的输入序列 $u(k)$ 以及输出序列的初值, 则可以利

用递推关系, 在计算机上一步步计算出输出序列.

$z-$ **变换法** 对于差分方程两边进行 $z-$ 变换, 得到以 z 为变量的代数方程. 求解此代数方程, 并对此代数方程的解取 $z-$ 逆变换, 就可以求出输出序列 $y(k)$.

值得注意的是: 差分方程的解, 可以提供线性定常离散系统在给定输入序列作用下的输出序列响应特性, 但不便于研究系统参数变化对离散系统性能的影响. 因此, 需要引入研究线性定常离散系统的另一种数学模型 – 脉冲传递函数.

3. **线性定常离散系统的脉冲传递函数**

我们知道, 对于连续系统, 传递函数定义为在零初始条件下, 输出量的 Laplace 变换与输入量的 Laplace 变换之比. 对于离散系统, 其脉冲传递函数的定义与此类似.

对于离散系统，其零初始条件是指：在 $t<0$ 时，输入脉冲序列各采样值 $u(-T),u(-2T),\cdots$ ，以及输出脉冲序列各采样值 $y(-T),y(-2T),\cdots$ ，均为零.

对于离散系统，如果系统的初始条件为零，输入信号为 $u(t)$, 采样后 $u^*(t)$ 的 $z-$ 变换函数为 $U(z)$. 系统的输出为 $y(t)$, 采样后 $y^*(t)$ 的 $z-$ 变换函数为 $J(z)$. 则线性定常离散系统的脉冲传递函数定义为系统输出采样信号的 $z-$ 变换与输入信号的 $z-$ 变换之比．记作

$$G(z)=\frac{J(z)}{U(z)}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}y(nT)z^{-n}}{\sum_{n=0}^{\infty}u(nT)z^{-n}}.$$

如果已知 $U(z)$ 和 $G(z)$, 则在零初始条件下线性定常离散系统的输出采样信号为

$$y^*(t)=\pounds^{-1}(J(z))=\pounds^{-1}(G(z)U(z)).$$

由于 $U(z)$ 已知，故求 $y^*(z)$ 的关键在于求出系统的脉冲传递函数 $G(z)$.

4 **线性离散系统的状态空间表示**

对于单输入 - 单输出的线性定常离散系统可以用差分方程来描述，但对于多输入 - 多输出的线性离散系统需则要用状态空间表示来描述.

线性离散系统的状态空间表示由离散状态方程和离散输出方程组成，它们表示为如下形式的矩阵差分方程

$$\begin{cases} x((k+1)T) &= G(kT)x(kT)+H(kT)u(kT) \\ y(kT) &= C(kT)x(kT)+D(kT)u(kT) \end{cases}$$

其中， T 为采样周期， $G(kT)$ 为 $n\times n$ 维系统矩阵， $x(kT)$ 为 n 维状态向量， $H(kT)$ 为 $n\times r$ 维控制矩阵， $u(kT)$ 为 r 维控制向量， $C(kT)$ 为 $m\times n$ 维输出矩阵， $y(kT)$ 为 m 维输出向量， $D(kT)$ 为 $m\times r$ 维关联矩阵.

线性离散系统的状态方程，表示 $(k+1)T$ 采样时刻的状态 $x((k+1)T)$ 与 kT 采样时刻的状态 $x(kT)$ 和输入 $u(kT)$ 的关系．线性离散系统的输出方程，表示采样时刻为 kT 时系统的输出 $y(kT)$ 与状态 $x(kT)$ 和输入 $u(kT)$ 的关系.

为了方便，常常省去 T, 考虑如下形式的方程

$$\begin{cases} x(k+1) &= G(k)x(k)+H(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k)+D(k)u(k) \end{cases} \tag{1.4.3}$$

如果 $G(k),H(k),C(k),D(k)$ 均为数值矩阵，则由 (1.4.3) 可得线性定常离散系统的状态空间表达式

$$\begin{cases} x(k+1) &= Gx(k)+Hu(k) \\ y(k) &= Cx(k)+Du(k) \end{cases} \tag{1.4.4}$$

值得注意的是：在以下讨论中，假设所分析的线性离散系统是周期性采样，并且采样脉冲宽度远小于采样周期，采样周期 T 的选择满足采样定理的要求. 此外，假设系统具有零阶保持特性，即在两个采样瞬时之间采样值不变，并等于前一个采样时刻的值.

定理 1.4.1 对于线性定常离散系统的状态空间表示 (1.4.4), 如果 $x(0)=0$, 那么，系统的脉冲传递函数为

$$G(z)=C(zI-G)^{-1}H+D.$$

证明：对于系统的状态方程 $x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$ 两边进行 $Z-$ 变换可得

$$z(X(z)-x(0))=GX(z)+HU(z).$$

由于 $x(0)=0$, 可得 $X(z)=(zI-G)^{-1}HU(z)$. 再对输出方程两边进行 $Z-$ 变换，可得

$$Y(z)=CX(z)+DU(z)=C(zI-G)^{-1}HU(z)+DU(z)=[C(zI-G)^{-1}H+D]U(z).$$

再由系统的脉冲传递函数矩阵 $G(z)$ 满足 $Y(z)=G(z)U(z)$, 因此

$$G(z)=C(zI-G)^{-1}H+D.$$

$\square$