



南開大學
Nankai University

流体力学综述报告

控制论基础课程作业

任课教师：王 红

学生姓名：苏可铮

学生学号：2012604

学生学院：数学科学学院

目录

1 软体	3
1.1 软绳的法向受力	3
1.2 悬链线	4
1.2.1 高度相等的情况	4
1.2.2 高度不相等的情况	5
1.2.3 推导	5
1.3 流体和固体	8
1.3.1 应力的角度	8
1.3.2 微观角度	9
1.4 位移与应变	10
1.4.1 位移	10
1.4.2 应变	11
1.4.3 应变几何方程	13
1.4.4 应变协调方程	13
2 流体的性质和静力学	14
2.1 流	14
2.1.1 流、流量	14
2.1.2 定常流和非定常流	14
2.1.3 均匀流和非均匀流	15
2.1.4 流密度	15
2.1.5 流密度与流	16
2.2 流体运动的描述方法	16
2.2.1 流体与固体的区别	16
2.2.2 Lagrange 法	17
2.2.3 Euler 法	17
2.2.4 物质导数	18

2.3 浮力、阿基米德原理	18
2.3.1 等效法	18
2.3.2 散度法	19
3 流体的基础方程式	20
3.1 连续性方程	20
3.2 伯努利方程	20
3.2.1 推导	21
3.3 流体力学守恒方程	22
3.3.1 流量守恒方程	22
3.3.2 动量守恒方程	23
3.3.3 能量守恒方程	23
3.4 Navier-Stokes 方程	24
3.4.1 应力张量与第一第二粘性系数	25
3.4.2 Navier-Stokes 方程 (NS 方程)	26
3.5 流体力学方程组	26

第一章 软体

流体力学不仅是学界重要的理论研究课题，更是一门遍布我们身边的日常生活的科学——小到生活饮水、淋浴；大到国防航母、飞机... 飞机为什么会飞？船为什么不会沉底？生活中种种看似平常的现象，背后本质上都蕴含着深刻的流体力学理论背景。

显然流体力学的研究对象为流体。因此我们在谈论流体力学之前，需要先对软体物质的运动、受力、应变做一定的了解，这一节我们先讨论关于软体物质的一些性质。

1.1 软绳的法向受力

我们知道当一根质量忽略不计的绳子紧绷时，如果它不受任何法相的力（即垂直于绳的力），它将保持一条直线。如果绳的一部分存在弯曲，则说明该部分受法向力。考虑如下模型（见图 1.1），水平放置的绳子的张力为 T ，经过半径为 R 的滑轮后弯曲了 θ 角。由于我们假设滑轮与绳之间无摩擦，即滑轮可以无摩擦滚动，则经过滑轮后绳的张力仍然为 T 。

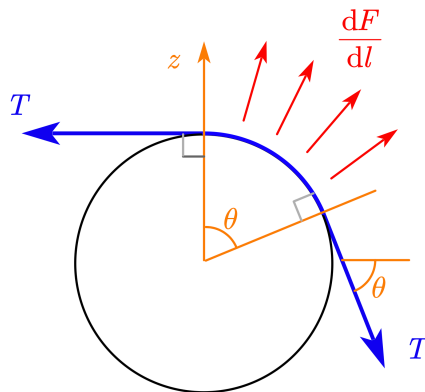


图 1.1: 滑轮对绳的线压强

显然，绳弯曲是由于在于滑轮接触的部分处处都受到法向的力。为了描述这种力的大小，我们取长度为 Δl 的一小段绳（弯曲忽略不计），若它受法向力大小为 ΔF ，就用 $\frac{\Delta F}{\Delta l}$ 来描述法向力的大小。当 $\Delta l \rightarrow 0$ 时，则记为 $\frac{dF}{dl}$ ，称为**线压强**，是一个标量（压强是单位面积的压力，线压强是单位长度的压力）。由牛顿第三定理我们知道力的作用是相互的，滑轮对绳的压力与绳对滑轮的压力处处等大反向，所以总压力也等大反向。

有了上述讨论，下面我们讨论绳子每点处的线压强与什么有关呢？由直觉我们可以猜到它和绳的张力成正比，和滑轮的半径有关，但与 θ 无关。我们先假设接触的部分先压强处处相等，对绳做受力分析。

绳能保持静止，说明它受到的合力为 0，即两端的拉力以及滑轮对它的力相加为 0。若我们只考所有力的 z 分量，可知滑轮对绳向上的分离等于绳右端拉力的 z 分量，大小为 $T \sin \theta$ 。其中滑轮对绳合的 z 分量可以用定积分计算：

$$F_z = \int_0^\theta \cos \theta' \frac{dF}{dl} R d\theta' = \frac{dF}{dl} R \int_0^\theta \cos \theta' d\theta' = \frac{dF}{dl} R \sin \theta$$

所以有：

$$\frac{dF}{dl} R \sin \theta = T \sin \theta$$

即：

$$\frac{dF}{dl} = \frac{T}{R}$$

这表明，线压强与张力成正比，和曲率半径成反比。这也符合我们上面的猜测。并且，可以验证水平方向也有受力平衡，滑轮对绳水平方向的合力为（规定向右为正）：

$$\int_0^\theta \sin \theta' \frac{dF}{dl} R d\theta' = \frac{dF}{dl} R \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' = \frac{dF}{dl} R (1 - \cos \theta) = T (1 - \cos \theta)$$

绳子两端的拉力在水平方向的合力为 $-T + T \cos \theta$ ，所以水平合力同样为 0。

更一般地，对于任意弯曲且光滑的绳子，要计算它任意一点受到的线压强，我们只需要知道该点处的张力与曲率半径 ρ 即可，即：

$$\frac{dF}{dl} = \frac{T}{\rho}$$

1.2 悬链线

1.2.1 高度相等的情况

悬链线 (catenary) 在物理上是指一条粗细不计的、质量均匀分布的柔软绳子两端悬挂在相同高度的两个点后（如图 1.2）当绳子在重力作用下达到平衡后形成的曲线。

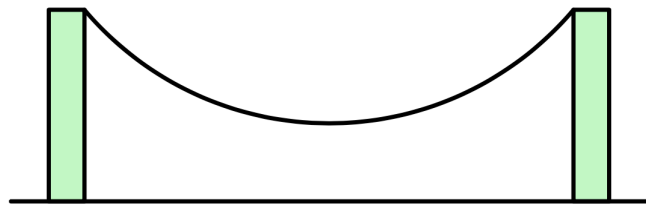


图 1.2: 悬链线

令绳子的最低点横坐标为 $x = 0$ ，水平向右为 x 轴，竖直向上为 y 轴。那么悬链线可以用函数 $y(x)$ 来表示为

$$y(x) = \frac{1}{k} \cosh(kx)$$

其中 \cosh 是双曲余弦函数，常数 k 满足：

$$\sinh\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{kL}{2}$$

其中 a 是两个悬挂点之间的距离， L 是绳子的总长度

1.2.2 高度不相等的情况

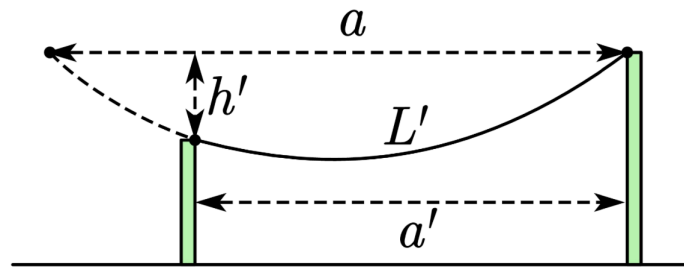


图 1.3: 悬链线

如上图 1.3 假设悬挂点左低右高，水平距离为 a' ，高度差为 $h' > 0$ ，绳长为 L' 。悬链线仍然具有以上形式，我们希望根据 a' 、 h' 、 L' 求出 k 。若把左边的悬链线补全到和右边一样的高度后，悬链线仍然关于最低点对称，令补全后两端相距为 a ，那么 k 满足：

$$\cosh(ka') - 1 = \frac{k^2}{2}(L'^2 - h'^2)$$

注意左边的悬挂点未必要在最低点的左边。另外根据上式可以验证当 $L' = h'$ 时 $a' = 0$ 。

1.2.3 推导

受力分析法

假设原点处的张力为 T ，绳的线密度为 λ ，那么区间 $[0, x]$ 的曲线长度为：

$$L(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \dot{y}(x')^2} dx'$$

区间 $[0, x]$ 所受重力为 $G = \lambda Lg$ 。根据受力分析， x 点的斜率为 $\frac{G}{T}$ ，这样就得到了悬链线 $y(x)$ 的微分—积分方程：

$$\dot{y} = \frac{g\lambda}{T} \int_0^x \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx'$$

两边对 x 再次求导得二阶微分方程:

$$\ddot{y} = k\sqrt{1 + \dot{y}^2}$$

其中令 $k = \frac{g}{T}$, 注意这是一个非线性二阶常微分方程, 其通解为:

$$y(x) = \frac{1}{k} \cosh(kx + C_0) + C_1$$

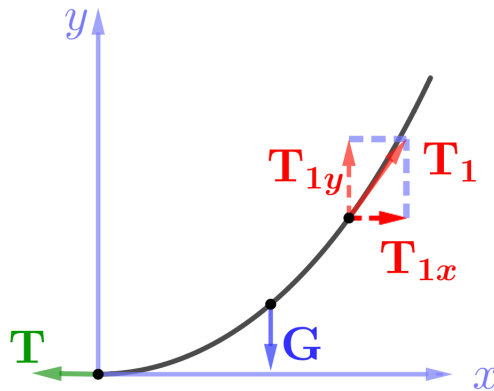


图 1.4: 受力分析

考虑到整个系统的对称性, 这意味着 $C_0 = 0$, 代入初始条件 $y(0) = 0$, 所以 $C_1 = -\frac{1}{k}$, 因此有:

$$y(x) = \frac{1}{k} [\cosh(kx) - 1]$$

又由限制条件:

$$\frac{L}{2} = \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx'$$

则代入上式可得:

$$\sinh\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{kL}{2}$$

对于高度不相等的情况, 由高度差 h' 的定义有:

$$h' = \frac{1}{k} \cosh\left(k\frac{a}{2}\right) - \frac{1}{k} \cosh\left[k\left(\frac{a}{2} - a'\right)\right]$$

由绳长的约束有:

$$L' = \int_{\frac{a}{2}-a'}^{\frac{a}{2}} \sqrt{1 + \dot{y}(x')^2} dx' = \frac{1}{k} \sinh\left(k\frac{a}{2}\right) - \frac{1}{k} \sinh\left[k\left(\frac{a}{2} - a'\right)\right]$$

通过解上两式可得:

$$\cosh(ka') - 1 = \frac{k^2}{2} (L'^2 - h'^2)$$

Euler- Lagrange 方程法

由于悬挂点是固定的两个点，绳子可看成经过这两个点的总长为 L 的曲线，由能量最低原理，我们知道绳子对应曲线的形状将使得绳子的质心最低，曲线可用一个函数表示，那么问题就变成求这样一个函数，使得绳子质心最低，这显然是一个极值问题，更明确的说，是一个求泛函极值的问题。求解这样的问题的普遍方法为变分法。

我们以水平方向为 x 轴，两悬挂点水平方向中垂线为 y 轴，则两悬挂点 x 坐标分别为 $-\frac{a}{2}$ 和 $\frac{a}{2}$ ，绳子对应的曲线函数为 $y(x)$ ，绳长 L ，质量为 m ，则其质心的 y 坐标为：

$$y_c = \frac{\int_0^L y(\frac{m}{L} ds)}{m} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{y\sqrt{1+y'^2}}{L} dx$$

则问题就转化为求 $y(x)$ ，使得 y_c 最小。这个问题可用 Euler- Lagrange 方程求解。

注意，上式的被积函数是 y, y' 的函数，而与 x 无关，直接用拉格朗日方程不好求解。这时候我们要先对被积函数变一下形。以 $F(y, y')$ 表示被积函数：

$$F(y, y') = \frac{y\sqrt{1+y'^2}}{L}$$

我们将自变量 x 更换为 y ，则 x 是 y 的函数。于是我们的问题就变成求积分

$$y_c = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} F(y, \frac{1}{\frac{dx}{dy}}) \frac{dx}{dy} dy$$

的极值曲线，令

$$x' = \frac{dx}{dy}, \quad \phi(y, x') = x'F(y, \frac{1}{x'})$$

则

$$y_c = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \phi(y, x') dy$$

此时，函数 $\phi(y, x')$ 包含自变量 y ，我们就可以使用拉格朗日方程求解。不难看出， $\phi(y, x')$ 代表拉格朗日函数 $L(t, q, q')$ ， y 代表拉格朗日方程中的 t ，而 x, x' 分别代表 q, q' 。代入拉格朗日方程，由于 $\phi(y, x')$ 不显含 x ，有：

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'} = C$$

其中 C 为常数，则有：

$$F(y, y') - y'F_{y'}(y, y') = C$$

即

$$\frac{y\sqrt{1+y'^2}}{L} - \frac{yy'^2}{L\sqrt{1+y'^2}} = C$$

整理可得:

$$y' = \frac{\sqrt{y^2 - (CL)^2}}{CL}$$

即

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - (CL)^2}} = \frac{dx}{CL}$$

令 $y = CL \cosh t$, 两边积分可得:

$$t = \frac{x}{CL} + C_0$$

其中 $t = f^{-1}(y)$ 为 $y = f(t) = CL \cosh t$ 的反函数, 代入上式可得:

$$y = f\left(\frac{x}{CL} + C_0\right) = CL \cosh\left(\frac{x}{CL} + C_0\right)$$

以最低点为零点, 代入边界条件 $y(0) = 0$, 可得 $C_0 = 0$, 即

$$y(x) = CL \cosh \frac{x}{CL}$$

令 $k = \frac{1}{CL}$, 则有:

$$y = \frac{1}{k} \cosh(kx)$$

又由绳长为 L 的约束条件, 即

$$L = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

代入可得:

$$\frac{2}{k} \sinh\left(\frac{ka}{2}\right) = L$$

1.3 流体和固体

众所周知, 物质的三态有液体、固体和气体, 这三者在我们生活的世界里无处不在。我们脚底下的土地, 我们呼吸的空气, 我们喝的水、迎面吹的风、天上下的雨……那么如何在物理定义上给出这三种物质形态的一个划分呢?

1.3.1 应力的角度

在流体力学中我们一般从应力的角度来划分这三种物质形态。**流体**是这样的一类物质, 它能够在**剪应力**的作用下连续地发生形变。

下图 1.5 中的“剪切”和“扭曲”过程都有剪应力的参与。剪应力是指施加在流体的某

个单位面积元上的平行于面积元方向的力，是应力张量的非对角元部分。它体现了剪应力与正应力的明显的区分。而拉伸和压缩是正应力，即力的方向是面积元的法线方向。在这种力的作用下，流体可能会发生相变——从液体到气体或从气体到液体。这是流体区别于固体的主要特点。不过要注意的是，气体和液体之间其实没有很强的分界线。在水的临界温度之上，水的液体与气体就不再有分界线了，也就是说在我们压缩和拉伸时，我们的肉眼将看不出液体与气体的特征，从应力和微观物理的层面上看，它们更没有分界线了。事实上，气体和液体的很多性质都是类似的，因此我们常用流体力学的手段去研究它们——例如我们的大气、我们的海洋，它们共有着许多规律——涡旋、对流等等。

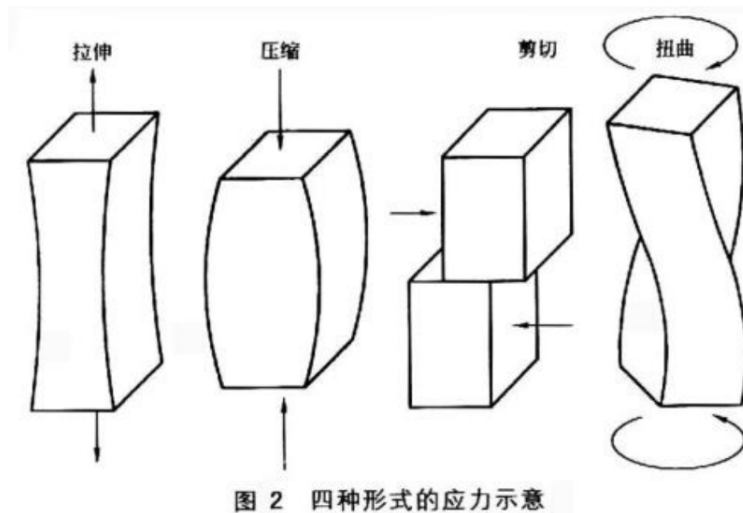


图 1.5: 几种不同的施加应力的方式

固体是指在外力的影响下只会发生微小的形变（几乎没有），但撤去外力以后就会恢复原形。这意味着固体的形状不会轻易地发生变化（在一些特殊例子中，木头会发生断裂，金属会被拉伸而延展）。虽然固体不易形变，但总会有微小的形变，只是我们的肉眼很难观察到。正因为它的形变及恢复力，固体才会发生振动，及声波在固体内部传播。于是我们才会听到鼓声敲响，才会感受到地震波的到来。

1.3.2 微观角度

从分子层面上看，固体是由一系列紧密排布的分子组成。它们在局部上或整体上是有序的，相互之间受分子间作用力或化学键的束缚，因此外力施加于固体之上时，它很难发生形变。有些固体的微观结构是长程有序的，可以找到它的晶胞（即重复排布的体积元），着被称为是“晶体”；否则被称为“非晶体”。铁、铜之类的金属就是晶体，氯化钠（食盐）、冰、金刚石也是晶体。

流体则不受到相互间作用力的束缚。所以微观图像是无序的，而且可以发生连续形变。其中，液体和气体可以由分子（或原子）的不同运动特征区分。液体的分子间距离

较小，因此一个分子要跑到很远的外边去，必须要由充足的能量，而且要越过周围一圈的势垒，否则只能随周围的分子一起集体行动。气体分子则不同，分子的平均自由程较大，也就是说气体分子周围没有明显的势垒，其运动比液体要更加狂放。正因为气体的这一特点，才有著名的麦克斯韦分布麦克斯韦—玻尔兹曼分布。

1.4 位移与应变

现在我们讨论如何表示物质中各处的变形。此处我们只探讨小变形的情况，即物质变形的程度非常轻微。

1.4.1 位移

在材料变形后，材料中的每一点的位置都发生改变。例如，原先位于 x_0 的点在变形后运动到了 a_0 位置，原先位于 x_1 的点运动到了 a_1 位置... 依此类推，我们可以在变形前点的位置 x 与变形后的位置 a 之间建立一种映射：

$$x \rightarrow a$$

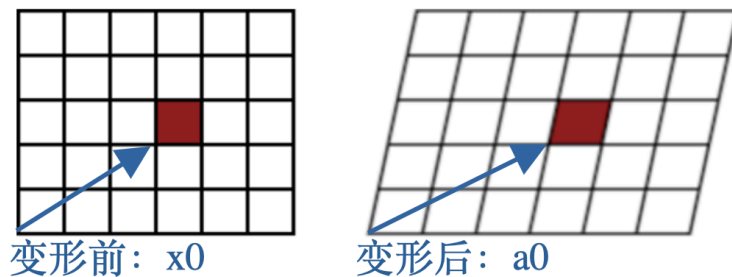


图 1.6: 材料变形后，材料中的每一点的位置发生改变

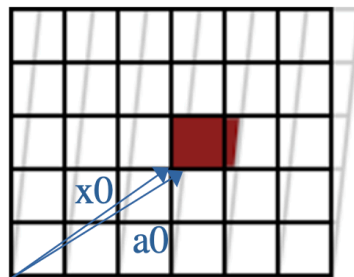


图 1.7: 上图的叠加

即我们定义了如下函数：

$$a = a(x)$$

位移函数

为了更好地表示 x 处的点的位置如何变化，我们定义**位移函数**：

$$u(x) = a(x) - x$$

由此，点 x 的位置变化也可以表述为：

$$x + u(x) = a(x)$$

u 是一个矢量函数，也被称为位移场。它的 3 个分量表示点 x 在 x_1, x_2, x_3 各方向上的位移，每一个分量都是关于点坐标的函数，即

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

且 $u(x)$ 是一个“好函数”，单值、连续且多阶可导。这意味着变形前后，原先的一个点不会分裂为两个，也不会有两个点合并为一个。

1.4.2 应变

有时我们使用应变 ε 来描述材料的变形。类似于应力，应变也定义在材料中的每一个微元处，可记为一个 3×3 的矩阵（二阶张量）。应变矩阵也是对称矩阵 $\varepsilon = \varepsilon^T$ ，有 6 个独立变量，即：

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

应变角标的含义与应力的类似，第一个角标表示面的法方向，第二个角标表示变形的方向。我们可将应变分为两类，正应变（两角标相同）与切应变（两角标不同）。

正应变

正应变与微元的长度变化有关。如下图 1.8 所示。

在 x_1 方向上，微元的原本长度为 $l_0 = dx_1$ ，变形后长度为 $l = dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1$ ，长度变化 $\Delta l = l - l_0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1$ ，那么定义正应变：

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

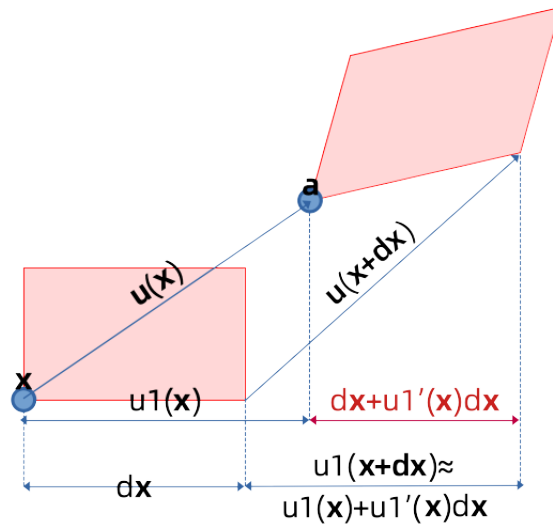


图 1.8: 正应变

切应变

切应变与微元的角度变化有关。如图 1.9 所示，定义切应变：

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

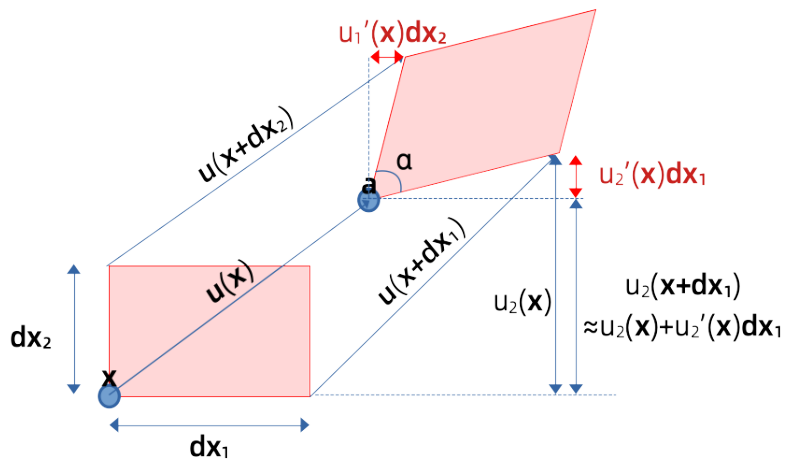


图 1.9: 切应变

有时也使用工程切应变 γ 。他们只是相差一个系数，即：

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = 90^\circ - \alpha$$

1.4.3 应变几何方程

在上面的讨论中，我们知道了应变与位移的部分联系。这些结论可以被推广，从而得到应变和位移间的完整联系，即应变几何方程。共有 6 个这样的方程以定义所有的应变，即：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3$$

1.4.4 应变协调方程

与应变几何方程类似，应变协调方程也存在如下 6 个方程：

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

第二章 流体的性质和静力学

有了之前对软体的性质、运动以及受力的讨论的基础，接下来我们着重讨论流体的性质，并且解释一些流体力学中常见的基础概念和专业术语。

2.1 流

2.1.1 流、流量

接下来讨论流。规定单位时间流经某个截面的某种物理量叫**流 (current)**。最常见的例子是电流，即单位时间流经某截面的电荷量，用极限定义为：

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

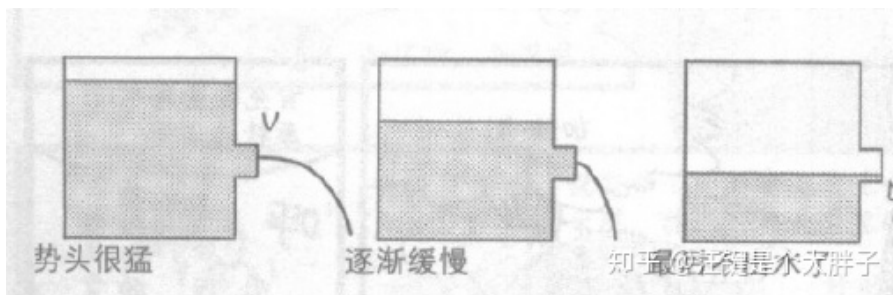
注意流的大小一般与所选择截面的位置，方向，面积都有关系。我们也可以把电荷 q 替换成其他物理量如质量、能量、粒子数，分别得到质量流、能流、粒子流。

一段时间内流经截面的某种物理量的总量就叫做**流量**，流量是时间 t 的函数，所以由导数的定义，流是流量关于时间的导数。反之，流量是流在某段时间的定积分为：

$$\Delta q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$

2.1.2 定常流和非定常流

拧开自来水管的水龙头，会有水流出，就算经过一段时间，水的流速也不会有什么变化。简单来说，这种**速度不随时间的变化而变化的流动就是定常流**。我们可以对非定常流做一个通俗易懂的解释：



如上图，随着时间的推移，储水槽内的水位不断下降，与此同时，水龙头的水速不断变小，这种速度随着时间的变化而变化的流动被称为非定常流。

2.1.3 均匀流和非均匀流



如上图，这种竹制流水槽在我国南方农村很常见，将竹制流水槽接到自来水龙头上，无论在竹制流水槽里的哪个部分，流动速度都是一样的，以竹制流水槽宽度的中心为原点 O ，水流方向为 x 方向，垂直方向为 y 方向。只存在 x 方向的速度 u ，不存在 y 方向的速度 v ，也就是说除了特定 x 方向之外的速度都为 0，这种同一个方向的流动成为均匀流。

与此相反的是， y 方向的速度 v 与 u 同时存在的话，这样的流动就成为非均匀流。若考虑把一根筷子作为障碍物插进上面流水槽的水中，就会使 y 方向出现速度 v ，从而转变为非均匀流。

2.1.4 流密度

流密度 (current density) 可以用于描述某时刻流体在的空间流动的速率。我们以水流为例，在一条河流或管道中，某时刻 t 在空间中任意一点 r 处，都对应一个水流速度 v ，如果我们在该点放置一个与速度垂直的微小截面 (通常叫面元)，令其面积为 ΔS ，在一段微小时间 Δt 内流经截面的质量为 Δm ，那么质量流密度 (mass current density) 可以用极限定义为：

$$j(r, t) = \hat{n} \lim_{\Delta S, \Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S \Delta t}$$

其中 \hat{n} 表示面元正方向法向量或者面元处流体的速度方向。

流密度是一个关于位置的矢量函数，即矢量场。且式中质量可以替换为不同的物理量，若替换为能量则称为能流密度，若是粒子数则称为粒子流密度，若是电荷量则称为电流密度，等等。

另外，我们也可以根据密度和速度来定义流密度

$$j(r, t) = \rho(r, t)v(r, t)$$

其中密度定义为（质量同样可以替换成其他物理量）：

$$\rho(r, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

2.1.5 流密度与流

我们来讨论如何通过流密度来计算流。易得流密度作为矢量场在某截面上的通量就是该截面的流：

$$I(t) = \int j(r, t) ds$$

2.2 流体运动的描述方法

流体力学中，流体运动的描述方法包括拉格朗日法与欧拉法，两种方法在物理意义和数学表达方面各有特点，下面我们具体解释。

2.2.1 流体与固体的区别

在之前的章节中，我们讨论过了流体与固体的区别，这里我们将从流体与固体的区别引入两种描述方法。

固体无论处于静止还是运动都可以通过有限的静变形承受剪切力，其形状不易变化，在运动学中，可以只从几何角度来描述物体的位置随时间的变化。

而流体在静止时无法通过有限的静变形承受剪切力，在运动状态下虽能产生剪切力，剪切力却不能维持流体内部各点位置的有序，反而使其产生连续不断的变形，流体内部各质点位置变化很大，单从几何角度描述其运动将很困难，需要专门的处理方法。

在固体力学中，我们只着眼于需要描述的物体，而物体之外的都叫做环境，某一物体在环境中运动，与环境之间发生力的作用从而改变运动状态，这种运动描述方法称为 Lagrange 法。

流体也适用 Lagrange 法，但流体不断变形，从几何角度需要进行复杂的坐标变换，因此，直接描述一小部分流体在整个流场空间（环境）的运动不大方便。我们考虑是不是可以只研究一个特定不变的空间呢，着眼于流体经过这个空间时发生的变化以及与

这个空间的相互作用，是否也能全面描述流体的运动呢，实践证明这也是可行的，这种方法称为 Euler 法。

2.2.2 Lagrange 法

我们先尝试使用 Lagrange 法描述流体的运动，考虑一个无穷小的不规则流体微团 A ，为研究其运动，我们跟随此微团在时间和空间中运动，从而描述微团的空间位置随时间变化的轨迹。可以想象我们是坐在船上，船跟随河水向前运动。

运动过程中，微团形状不断变化，但仍将其看作一个整体，独立的变量为时间 t 与变动的空间坐标 $s = (x, y, z)$ ，Lagrange 法这样描述流体微团的运动：

- 在 t 时刻，微团 A 的空间位置为 $r = r(t, s)$ ，某一瞬时的位置与时间和空间坐标都有关。
- 在 t 时刻，微团 A 的速度为 $V = \frac{dr}{dt}$ ，某一瞬时的速度是空间坐标对时间的导数。
- 在 t 时刻，微团 A 的加速度为 $a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$ 。

因为微团在空间不断运动，Lagrange 法的坐标本身也在空间内不断变化，由于一般的流体微团内部都包含大量的质点，且由于微团的变形，不同质点的运动情况复杂多样，Lagrange 法不再方便。

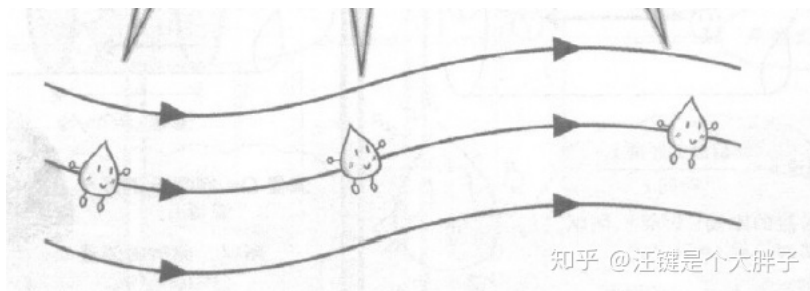


图 2.1: Lagrange 法

简单来说，所谓 Lagrange 法，就是一直跟踪观察同一个流体粒子的方法。我们可以通俗地理解为跑马拉松的时候，摄像师要报道一名选手，他就扛着摄像机一直跟在选手后面跑来拍，如上图 2.1 所示。

2.2.3 Euler 法

Euler 法描述流体运动的方式则是将注意力集中到流体随时间流过的固定的空间位置 A 上，研究一个固定的发生流体运动的空间，空间形状可以任意而空间坐标是固定的。可以想象我们站在桥上，观察桥下河水的流动。

Euler 法的独立变量是时间 t 和所研究空间的固定坐标 $s = (x, y, z)$ ，Euler 法这样描述通过固定空间的流体的运动：

- 在 t 时刻, A 处流体质点的速度为 $V = u(t, x, y, z)\hat{i} + v(t, x, y, z)\hat{j} + w(t, x, y, z)\hat{k}$, 速度是某一时刻位于空间某一点的流体质点的速度, 其与时间和空间坐标都有关。

至于 t 时刻的加速度, 需要使用**物质导数 (Substantial Derivative)** 的概念, 我们将在下一节讨论物质导数的概念。实际上, 此时的 A 处流体质点的加速度为 $a = \frac{\partial V}{\partial t} + (\nabla \cdot \nabla)V$, 这个式子由两部分组成, 前一部分只与时间相关, 后一部分与空间相关, 使用这种表达, Euler 法更容易描述流体运动的具体情况。

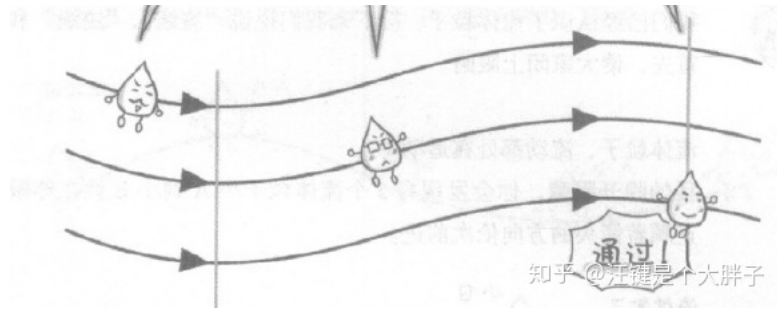


图 2.2: Euler 法

简单来说, 所谓 Euler 法就是持续观测特定的位置, 并测量通过其中的流体粒子的方法。可以理解为同样是马拉松比赛, 摄像师把摄像机架在某一个固定的地方, 拍摄不同的选手跑过摄像机位置时候的风采。

2.2.4 物质导数

物质导数也称为实质导数, 在流体力学中, 物质导数实际上是 Lagrange 法下某变量对时间的导数, 但它可以表示成对 Euler 变量的全导数形式, 因其特殊性, 常用大写的微分符号来表示, 称为物质导数 (Substantial Derivative), 或实质导数, 又或者随体导数。设 Φ 是流体的某种性质, 物质导数的一般形式为:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + (V \cdot \nabla)\Phi$$

在上式中, 等号左边的项为物质导数, 等号右边的第一项称作当地导数, 第二项称作对流导数或者牵连导数, 这两项是 Euler 法下的描述。

2.3 浮力、阿基米德原理

2.3.1 等效法

我们先用一个简单易懂的方式解释浮力。假设在重力加速度为 g 的环境中, 容器中密度为 ρ_0 的液体完全静止。这时令液体内部有一任意形状的闭合曲面, 体积为 V_0 。把曲

面内部的液体作为一个整体做受力分析，其质量为 $m = \rho_0 V_0$ ，所受重力为 $mg = \rho_0 V_0 g$ 。由于曲面中液体保持静止，说明曲面外的液体对曲面内的液体施加了相同大小的浮力。现在我们如果把曲面内的液体替换为一块密度为 ρ 的物体，由于曲面形状不改变，外界液体对该物体的浮力仍然为：

$$F = \rho_0 V_0 g$$

注意 V_0 为物体在水中部分的体积，如果物体只有部分在水中， V_0 将小于物体的体积。

2.3.2 散度法

现在我们用面积分的方法表示浮力。令 z 轴竖直向上，且水面处 $z = 0$ ，则水面下压强为：

$$P = -\rho_0 g z$$

现在把上述的闭合曲面划分为许多个微面元，第 i 个面元用矢量 Δs_i 表示，其中模长为面元的面积，方向为从内向外的法向。这个面元受到外界液体的压力为：

$$\Delta F_i = -P \Delta s_i = \rho_0 g z \Delta s_i$$

现在把所有面元所受的压力求和，并可用曲面积分表示为：

$$F = \oint \rho_0 g z ds = \int \nabla(\rho_0 g z) dV = \rho_0 g z V_0 \hat{z}$$

即为物体所受的浮力。且与上节中得出的结论一致。

第三章 流体的基础方程式

3.1 连续性方程

我们以生活中的水管为例，自来水龙头流进水管的水会从软水管的另一端流出来，这种情况下，流入水管的流体流量和流出时的流量应该是完全相同的。通俗点说，进入水管的流体粒子一定会在某一时刻从水管中出来，不会再中途消失。这就是**流体的质量守恒定律**，流体力学中将其称作**连续性方程**。

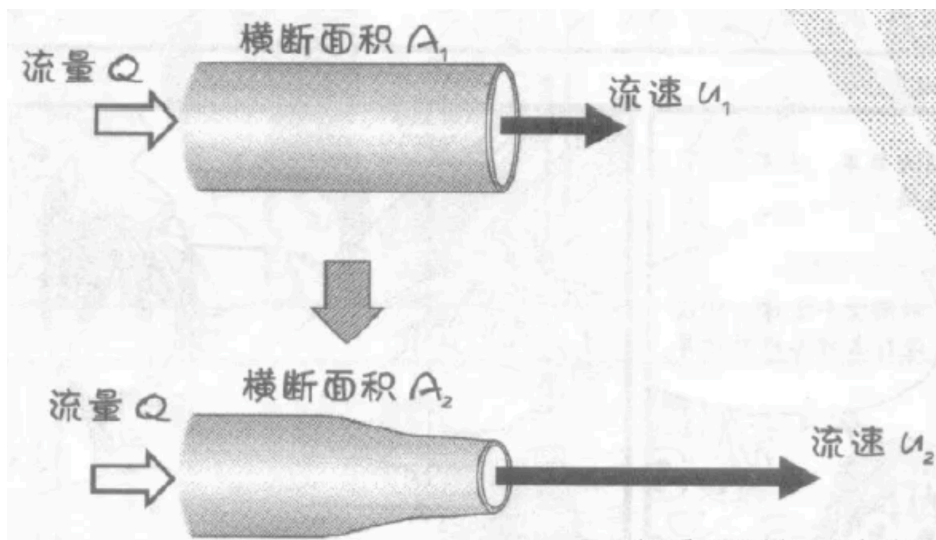


图 3.1: 连续性方程

以上图 3.1 为例，无论是通过原出口的横断面面积 A_1 ，还是通过因为外力作用而引起管口变小的横断面面积 A_2 。由于流量 Q 是相同的，所以对于较小的横断面面积，必然有着更大的流出速度。

3.2 伯努利方程

伯努利方程是关于不可压缩的流体的方程。

假设液体不可被压缩、没有粘滞性、与管壁也没有摩擦阻力，那么流体处处满足伯

努利方程为：

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C$$

其中 g 是重力加速度， z 是高度， p 是液体的压强， ρ 是液体的密度， C 为常数

3.2.1 推导

如图 3.2，考虑一根管子的粗细不同两部分的横截面面积分别为 A_1, A_2 ，压强分别为 p_1, p_2 ，高度分别为 h_1, h_2 ；其中流过的液体密度为 ρ ，管内流速分布不随时间变化，则在图中 1、2 两处的速度分别为 v_1, v_2 。

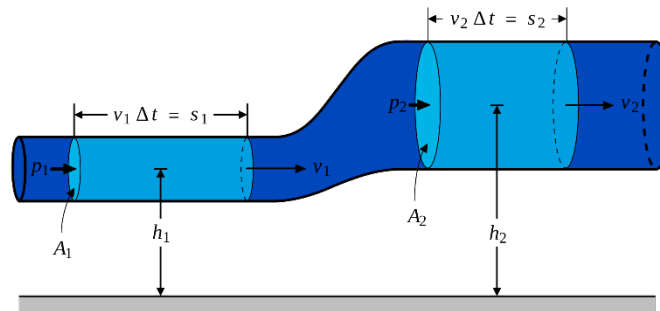


图 3.2: 伯努利方程的推导

考虑 A_1, A_2 之间的这段液体，假设一段 Δt 时间内，起左端和右端分别移动了 s_1, s_2 。根据不可压缩的假设，即满足流体的连续性方程，则流入水管的水量等于流出水管的水量，即 $A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t = V$ ，即 m_1, m_2 。这个过程中这段液体的机械能改变了多少呢？机械能包括动能和重力势能。由于中间深蓝色的部分的机械能保持不变，所以可以等效视为 1 处的一小截液体移动到了 2 处。

考虑浅蓝色的两段液体的机械能为：

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1, \quad E_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2$$

所以 A_1, A_2 间的液体在时间 Δt 内机械能增量为 $E_2 - E_1$ 。

再考虑液体压力的做功。 A_1, A_2 之间的液体向右移动时， A_1 处的压强对其做正功， A_2 处的压强对其做负功，即：

$$W_1 = p_1 v_1 A_1 \Delta t = p_1 V + m g h_1, \quad W_2 = p_2 v_2 A_2 \Delta t = -p_2 V$$

则根据机械能守恒定理 $W_1 + W_2 = E_2 - E_1$ ，代入得：

$$p_1 V + \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 = p_2 V + \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2$$

事实上由于 1, 2 的位置可以任意选取, 因此任意位置都有:

$$pV + \frac{1}{2}mv^2 + mgh = C'$$

两边同时除以 $V\rho$ 可得:

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C$$

3.3 流体力学守恒方程

一般地, 我们用密度 ρ , 速度 v 等物理量描述流体中每个位置流体微元的性质, 并列所谓的流体力学方程来描述每个流体微元随时间的演化。它们之间应当满足一定的守恒方程, 例如**流量守恒方程**, **动量守恒方程**, **能量守恒方程**等。在这一节中, 我们将对流体力学的守恒方程进行简要的推导和介绍。

3.3.1 流量守恒方程

流量守恒方程即我们之前讨论的连续性方程, 在这里我们给出一个更一般的形式。取一个随流体一起运动的被闭曲面 S 包围的体积 V , 对其中的密度进行积分得到这一个物质体的质量。物质体在随流体一起运动的过程中, 其质量应当是不变的, 那么我们有:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0$$

进一步将它拆成两部分, 一部分是每个位置密度的偏导数随时间的变化, 另一部分是闭曲面 S 的变化带来的质量变化。我们得到:

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho u \cdot \hat{n} dS = 0 \Rightarrow \int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) \right] dV = 0$$

则, 我们得到了流量守恒方程的微分形式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0$$

再利用 $\nabla \cdot (\rho u) = \rho \nabla \cdot u + u \cdot \nabla \rho$, 则上式可以改写为:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot u = 0$$

我们也可以用另一种方式来考察这一结果。直接从 $\frac{d}{dt}(\rho \delta V) = 0$ 出发 (这表明一个流体微元随时间演化的过程中质量是不变的), 得到:

$$\rho \frac{d\delta V}{dt} + \delta V \frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\delta V}{dt} = -\delta V \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

即我们可以得到:

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = \nabla \cdot u$$

这个结果是不难理解的。取 δV 为一个无限小立方体, 计算六个面流体运动的流进流出, 可以轻易得到这个表达式, 然后事实上不论 δV 的形状如何, 上式都是成立的, 因为我们总能把 δV 分割成许许多多小立方体, 而每个小立方体都满足上式, 进而利用 $\nabla \cdot u$ 在这一小区域的连续性, 就可以得到这个结果。

3.3.2 动量守恒方程

类似上面的推导, 我们先对物质体列出积分方程:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho u dV = \int \rho g dV + \int_S f dS$$

其中 g 表示作用于每个流体微元上的体力, 例如重力就是体力的一种。对上式左侧进行化简, 可以得到

$$\int \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dV + \int_S \rho u (u \cdot \hat{n}) dS = \int \rho g dV + \int_S \hat{n} \cdot \overleftrightarrow{T} dS$$

其中 T 是流体的应力张量, T_{ij} 表示在法线为 x_i 方向的单位面元上, 面外对面内的面力的 x_j 分量。可以证明, 为了保证角动量守恒, 应力张量是二阶对称的张量。最终我们有矢量表达式

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho (u \cdot \nabla) u = \rho g + \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$$

另外我们有一种更简单的推导方法。

注意到 $d(\rho u \delta V)/dt = \rho \delta V du/dt + u d(\rho \delta V)/dt = \rho \delta V du/dt$ 。所以从式 7 出发立刻可以得到

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho g + \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$$

这和上式是等价的。

应力张量 T_{ij} 一般表示为 $-p + \tau_{ij}$, p 表示压强, τ_{ij} 则是由流体的粘性带来的项, τ_{ij} 是对称张量。

3.3.3 能量守恒方程

最后让我们讨论能量守恒方程。流体微元的能量一般分为内能 e 和动能 $\frac{1}{2}\rho u^2$, 前者 and 流体的热力学状态 (压强、温度或密度) 有关, 而后者和流体微元的运动有关。下面我们来具体分析能量守恒方程的形式。

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2}|u|^2 \right) dV = \int \rho g \cdot u dV + \int_S f \cdot u dS - \int_S q \cdot n dA$$

e 为单位质量的内能。面力 f 在速度方向上作用一段距离导致做功, q 表示面元上的热流方向。

那么经过一系列的化简我们可以得到

$$\begin{aligned}\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} |u|^2 \right) &= \rho g \cdot u + \frac{\partial}{\partial x_i} (T_{ij} u_j) - \nabla \cdot q \\ &= \rho g_i u_i + \left(-p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + u_j \left(-\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}\end{aligned}$$

以上就是我们得到的能量守恒方程。下面我们对动量守恒方程点乘 u , 来考察能量守恒方程中的**动能守恒**

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |u|^2 \right) = \rho g_i u_i + u_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = \rho g_i u_i + u_j \left(-\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \right)$$

将两式相减, 我们得到了**内能守恒**:

$$\begin{aligned}\rho \frac{de}{dt} &= T_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \\ &= -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = -\frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \nabla \cdot q \\ \Rightarrow \frac{de}{dt} &= p \frac{d\nu}{dt} + \tau_{ij} S_{ij} - \nabla \cdot q, (\nu = 1/\rho)\end{aligned}$$

如果将应力张量的表达式代入, 并利用热传导定律将 q 表达为 $-k\nabla T$, 上述方程可以进一步改写为

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \frac{\partial u_m}{\partial x_m} + 2\mu \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{ij} \right)^2 + \mu_\nu \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

3.4 Navier-Stokes 方程

回顾流体力学的动量守恒方程为:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u = \rho g + \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{T}$$

为了进一步解这个方程, 我们需要知道应力张量 T_{ij} 的具体形式。 T_{ij} 表示在法线为 x_i 方向的单位面元上, 面外对面内的面力的 x_j 分量, 而且是二阶对称张量 (为了保证角动量守恒), 那么它有怎样的性质呢?

在下面的讨论中我们将假设我们讨论的流体是牛顿流体: 流体的应力和流体的速度梯度有线性关系, 也就是服从广义胡克定律的关系。这当然是不正确的, 因为实际问题中, 当形变特别大时, 有各种各样的非线性效应。但对于大多数问题来说这样的假设是足够的, 而且能得到相对简单的方程形式。

3.4.1 应力张量与第一第二粘性系数

最简单的一种非粘性的各向同性流体，其应力张量的对角元都为 $-p$ ，这意味着每个面元上受到的力是垂直于面元的，单位面积上受到的力为流体在该处的压强，因此对角元 $-p$ 给出的就是压强 p 。但实际情况中流体是有粘性的，例如下图所示

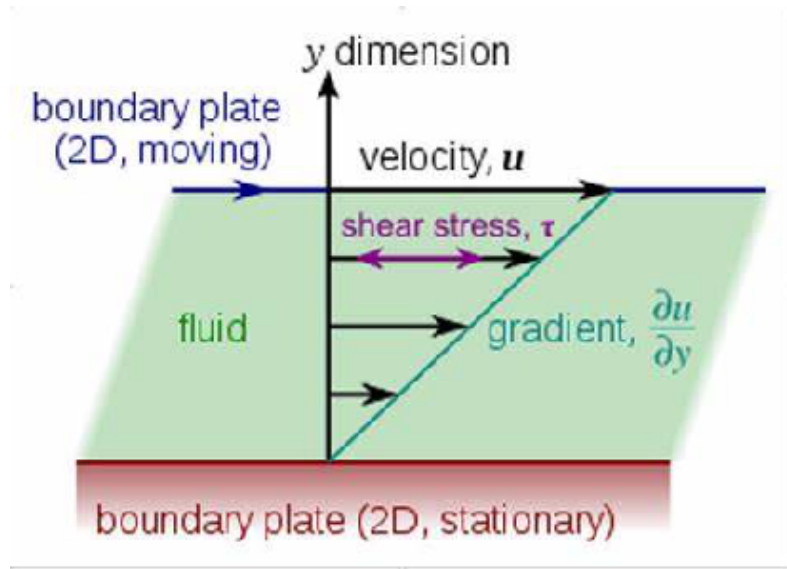


图 3.3: 牛顿粘性实验

当 y 方向相邻两侧流体的水平速度 u 有梯度时,就会产生一个剪应力 $\tau = \mu du/dy$, μ 被称为第一粘性系数。继续假设流体是各向同性的,那么似乎应该有 $T_{ij} = \mu du_j/dx_i (i \neq j)$ 。但这样实际上是有问题的,在我们上面的牛顿黏性实验中,应力张量的非对角元实际上不止有 T_{21} , 否则考察其中的一个微元,上面受到的向右的力比下面受到的向右的力更大,取足够小的微元,它的单位体积角动量将会趋于无穷大。这也意味着应力张量必须是对称张量。在上面的牛顿粘性实验中,事实上每一水平层流体,沿 x 方向相邻两个紧挨着的流体微元,将会有 y 方向的面力。也就是说 $T_{21} = T_{12}$ 。最终,我们可以把 T_{ij} 改写为 $\mu(du_j/dx_i + du_i/dx_j) = 2\mu S_{ij} (i \neq j)$ 。

上面的讨论仍然存在问题。既然 T_{ij} 对角元全相等(为 $-p$),那么对于各向同性的流体,应力张量矩阵 T_{ij} 应当在正交相似变换下对角元应当仍是 $-p$ 。但从牛顿粘性实验的 T_{ij} 出发很容易发现这是错误的。为了修正使得 T_{ij} 各向同性,我们需要将第一粘性系数也考虑进 T_{ij} 的对角元中: $T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu S_{ij}$ 。

上面的讨论还没结束。对于可压缩流体,流体微元的密度改变,一般而言,静压强 p 应当是密度 ρ 的函数。但是,流体在压缩和膨胀的过程中,当 $S_{mm} = \nabla \cdot u \neq 0$, 流体除了静压强 p 以外,还可能会额外多出一个粘性压强。我们设第二粘性系数 μ_ν , 并假设这个过程使得压强在 p 基础上增大了 $\mu_\nu S_{mm}$ (最终表现为 T_{ij} 的对角元的平均值), 那么

可以写出最终的本构方程:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left(S_{ij} - \frac{2}{3}S_{mm}\delta_{ij} \right) + \mu_\nu S_{mm}\delta_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

3.4.2 Navier-Stokes 方程 (NS 方程)

整理上面的方程:

$$\begin{aligned} \rho \frac{du_j}{dt} &= \rho g_j + \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ij} \\ T_{ij} &= -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \\ &= -p\delta_{ij} + 2\mu \left(S_{ij} - \frac{2}{3}S_{mm}\delta_{ij} \right) + \mu_\nu S_{mm}\delta_{ij} \end{aligned}$$

将应力张量表达式代入流体力学动量方程组, 我们就得到了著名的 **Navier-Stokes** 方程:

$$\rho \frac{du_j}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho g_j + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \left(\mu_\nu - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{ij} \right]$$

当流体内部温度的差距较小时, 第一粘性系数和第二粘性系数可以近似认为是常数。那么上式可以简化表达为

$$\rho \frac{du_j}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho g_j + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} + \left(\mu_\nu + \frac{1}{3}\mu \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_m}$$

所以, 对于不可压缩流体, $\frac{\partial u_m}{\partial x_m} = 0$, 有方程

$$\rho \frac{du}{dt} = -\nabla p + \rho g + \mu \nabla^2 u$$

对于远离固体边界的流体, 有时可以作近似处理, 看成是无粘性的流体。此时的方程简化为欧拉方程。

$$\rho \frac{du}{dt} = -\nabla p + \rho g$$

3.5 流体力学方程组

描述流体微元的物理量有 ρ, p, T, e, u 等, 而完整描述它们随时间的演化需要流体力学方程组。它们分别是我们之前讨论的——流量守恒方程、动量守恒方程、动能守恒方

程、内能守恒方程、本构方程和状态方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) &= 0 \\ \rho \frac{du_j}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho g_j + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} + \left(\mu_\nu + \frac{1}{3}\mu \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \\ \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |u|^2 \right) &= \rho g_i u_i + u_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = \rho g_i u_i + u_j \left(-\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \right) \\ \rho \frac{de}{dt} &= -p \frac{\partial u_m}{\partial x_m} + 2\mu \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{ij} \right)^2 + \mu_\nu \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \\ T_{ij} &= -p \delta_{ij} + \tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \left(S_{ij} - \frac{2}{3} S_{mm} \delta_{ij} \right) + \mu_\nu S_{mm} \delta_{ij} \\ \rho &= \rho(p, T) \end{aligned}$$

上面的本构方程和状态方程可以代入随时间演化的方程, 随时间演化的为前 4 行 (其中动量守恒方程是三分量的), 共 6 个方程; 其中动能守恒方程可以由动量守恒方程推出, 所以可以舍去, 总共可以得到 5 个分量的独立的方程。现在再来看变量个数, ρ, p, T, e, u 一共 7 个分量, 其中 e, ρ 都蕴含在状态方程之中:

$$\rho = \rho(p, T), e = e(p, T)$$

所以流体力学方程组实际上独立的变量个数是 5 个。

5 个独立的方程和 5 个独立的变量, 构成了完备的流体力学方程组。

流体力学方程组可以用于作数值模拟。但是数值计算的计算能力和模拟精度是有限的。抛开数值计算, 这些流体力学方程是相当复杂的, 以至于即使人们研究相当简单的模型, 也几乎无法得到解析解, 这也是我们日常生活中, 天气预报貌似总不太准的原因。因此现阶段, 我们会更多地研究一些流体力学方程组能很好地解决和描述的问题, 例如**涡旋、伯努利公式、重力波**等。而关于**湍流、层流**等复杂流体的研究, 也是当今研究领域正在尽力攻克的方向与难题。