Final Exam

Control Theory, Professor Wang

Su Kezheng | 2012604 | 748527866@qq.com

Question 1

已知一个力学系统的 Lagrange 函数为：

$$L(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

1A

求出系统的 Euler-Lagrange 方程

Answer:

由系统的 Lagrange 函数可得：

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\ddot{\theta}$$

则系统的 Euler-Lagrange 方程为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

代入得：

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

整理得：

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

1B

通过计算验证系统的 Hamilton 函数为：

$$H(\theta,p) = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$

Answer:

由定义有：

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

$$H(\theta,p) = \dot{\theta}p - L = \frac{p^2}{ml^2} - \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$

系统的状态方程为：

$$\dot{\theta} = \frac{1}{ml^2}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{p}{ml^2} = \frac{\partial H(\theta,p)}{\partial p}$$

系统的协态方程为:

$$\dot{p}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\partial L}{\partial\theta}=-mgl\sin\theta=-\frac{\partial H(\theta,p)}{\partial\theta}$$

综上通过计算验证可知，系统的 Hamilton 函数为

$$H(\theta,p)=\frac{p^2}{2ml^2}-mgl\cos\theta$$

1C

求出系统的 Hamilton 方程

Answer:

系统的状态方程为:

$$\dot{\theta}=\frac{1}{ml^2}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{p}{ml^2}=\frac{\partial H(\theta,p)}{\partial p}$$

系统的协态方程为:

$$\dot{p}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\partial L}{\partial\theta}=-mgl\sin\theta=-\frac{\partial H(\theta,p)}{\partial\theta}$$

综上可知，系统的 Hamilton 方程为

$$\begin{cases}\dot{\theta}=\dfrac{p}{ml^2}\\[2ex]\dot{p}=-mgl\sin\theta\end{cases}$$

1D

从系统的 Hamilton 方程出发，导出系统的 Euler-Lagrange 方程

Answer:

由系统的 Hamilton 方程可知:

系统的协态方程为:

$$\dot{p}=-mgl\sin\theta=-\frac{\partial H(\theta,p)}{\partial\theta}$$

又由于:

$$\dot{p}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=-mgl\sin\theta$$

由系统的 Lagrange 函数可得:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\ddot{\theta}$$

比较上两式可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

即

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

于是得到了系统的 Euler-Lagrange 方程

Question 2

已知线性定常系统的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

2A

判断系统的能控性，并找出能控性子系统

Answer: 不妨记:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \, C = (1 \quad 1 \quad 0)$$

则有:

$$AB = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \, A^2B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

则系统的能控性判别矩阵为:

$$Q_c = (B \quad AB \quad A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

显然 $rankQ_c = 2$，则系统不是完全能控的，且按能控性结构分解后能控状态 $\bar{x}_c$ 是二维的

则选取非奇异变换阵 P 使得：

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

其中 P^{-1} 的第一列和第二列分别为 Q_c 的第一列和第二列，它们线性无关，P^{-1} 的第三列为任意选取的使得 P^{-1} 非奇异的列向量，显然 $rankP^{-1}=3$，所以 P^{-1} 非奇异且

$$P=\begin{pmatrix}0 & -3 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

对原系统进行非奇异变换 $\bar{x}(t)=Px(t)$，通过计算得到：

$$\bar{A}=PAP^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -3 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\bar{B}=PB=\begin{pmatrix}0 & -3 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\bar{C}=CP^{-1}=(1 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}=(1 \quad 1 \quad 1)$$

于是系统按能控性结构分解后的状态空间描述为：

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{\bar{x}}_c(t)\\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}_c(t)\\ \bar{x}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}_c(t) & \bar{x}_{\bar{c}}(t)\end{pmatrix}\end{cases}$$

则系统的低维能控子系统为：

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}_c(t)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\bar{x}_c(t)+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\bar{x}_c(t)\end{cases}$$

2B

判断系统的能观测性，并找出能观测性子系统

Answer: 不妨记：

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&3&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1&0\end{pmatrix}$$

则有：

$$CA=\begin{pmatrix}0&-1&-1\end{pmatrix},CA^2=\begin{pmatrix}-1&-3&-2\end{pmatrix}$$

则系统的能观测性矩阵为：

$$Q_o=\begin{pmatrix}C\\CA\\CA^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-1\\-1&-3&-2\end{pmatrix}$$

显然 $rankQ_o=2$，则系统不是完全能观测的，且按能观测性结构分解后能观测状态 $\bar{x}_o$ 是二维的，则选取非奇异变换阵 P 使得：

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

其中 P^{-1} 的第一行和第二行分别为 Q_o 的第一行和第二行，它们线性无关，P^{-1} 的第三行为任意选取的使得 P^{-1} 非奇异的行向量，显然 $rankP^{-1}=3$，所以 P^{-1} 非奇异且

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

对原系统进行非奇异变换 $\bar{x}(t)=Px(t)$，通过计算得到：

$$\bar{A}=PAP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$$

$$\bar{B}=PB=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\bar{C}=CP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}$$

于是系统按能观测性结构分解后的状态空间描述为：

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{\bar{x}}_o(t)\\\dot{\bar{x}}_{\bar{o}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-2&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}_o(t)\\\bar{x}_{\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}u(t)\\y(t)=\begin{pmatrix}1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}_o(t)&\bar{x}_{\bar{o}}(t)\end{pmatrix}\end{cases}$$

则系统的低维能观测子系统为：

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_o(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \bar{x}_o(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}_o(t) \end{cases}$$

Question 3

已知线性时变系统的状态方程为：

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in [t_0, t_1],\ x(t_0) = x_0$$

在一个采样周期为 T 的情况下，将系统离散化为：

$$x(k+1) = G(k)x(k) + H(k)u(k)$$

3A

证明：

$$G(k) = \Phi((k+1)T, kT)$$

$$H(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T, \tau)B(\tau)d\tau$$

其中，$\Phi(t, t_0)$ 为系统的状态转移矩阵

Answer: 设采样周期为 T，采样时刻为 kT $(k = 0, 1, 2, \dots)$，分别记 $x(k) = x(kT), u(k) = u(kT)$，由于线性实变系统的状态方程的解为：

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

其中 $\Phi(t, t_0)$ 为系统的状态转移矩阵，令 $t = (k+1)T$，t_0 对应于 $k = 0$，并且在 $t \in [kT, (k+$

$1)T]$ 时均有 $u(t)=u(k)$，于是

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \Phi((k+1)T,0)x_0+\int_0^{(k+1)T}\Phi((k+1)T,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\
&= \Phi((k+1)T,kT)\Phi(kT,0)x_0+\int_0^{kT}\Phi(k+1)T,kT)\Phi(kT,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\
&\quad +\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi((k+1)T,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\
&= \Phi((k+1)T,kT)\Big[\Phi(kT,0)x_0+\int_0^{kT}\Phi(kT,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\Big] \\
&\quad +\Big[\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi((k+1)T,\tau)B(\tau)d\tau\Big]u(k) \\
&= \Phi((k+1)T,kT)x(k)+\Big[\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi((k+1)T,\tau)B(\tau)d\tau\Big]u(k)
\end{aligned}
$$

即

$$G(k)=\Phi((k+1)T,kT),\ H(k)=\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi((k+1)T,\tau)B(\tau)d\tau$$

3B

当系统为定常的，并且周期 T 比较小时，通过计算说明：可以近似有：

$$G=I+TA,\ H=TB$$

Answer: 对于线性定常系统：$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\ t\in[t_0,t_1],\ x(t_0)=x_0$

此时有：

$$G(k)=\Phi\Big((k+1)T,kT\Big)=\Phi\Big((k+1)T-kT\Big)=\Phi(T)=e^{AT}=G$$

$$
\begin{aligned}
H(k) &= \int_{kT}^{(k+1)T}\Phi\Big((k+1)T,\tau\Big)Bd\tau=\left(\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi\Big((k+1)T-\tau\Big)d\tau\right)B \\
&= \Big(-\int_T^0\Phi(t)dt\Big)B=\Big(\int_0^T e^{At}dt\Big)B=H
\end{aligned}
$$

即系统的离散化状态空间表达式为：$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$，其中

$$G=e^{AT}=I+TA+(TA)^2+\cdots$$

$$H=(\int_0^T e^{At}dt)B=\Big(\int_0^T(I+TA+(TA)^2+\cdots)dt\Big)B=TB+\frac{T^2}{2}AB+\cdots$$

故在周期 T 比较小时，近似有：

$$G = I + TA,\ H = TB$$

Question 4

已知系统的传递函数为：$G(s) = \dfrac{s^2+b}{s^3+7s^2+14s+8}$

4A

当 $b=-16$ 时，给出系统的一个能控标准型实现

Answer: 当 $b=-16$ 时，系统的传递函数可以写为：

$$G(s) = \frac{s^2-16}{s^3+7s^2+14s+8} = \frac{(s+4)(s-4)}{(s+1)(s+2)(s+4)} = \frac{s-4}{(s+1)(s+2)} = \frac{s-4}{s^2+3s+2}$$

由 $\beta_0=-4$，$\beta_1=1$，$\beta_2=0$；$\alpha_0=2$，$\alpha_1=3$，$\alpha_2=1$
则系统的能控性标准型实现 (A_c, B_c, C_c) 为

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix},\ B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ C_c = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4B

当 $b=-4$ 时，给出系统的一个能观测标准型实现

Answer: 当 $b=-4$ 时，系统的传递函数可以写为：

$$G(s) = \frac{s^2-4}{s^3+7s^2+14s+8} = \frac{(s+2)(s-2)}{(s+1)(s+2)(s+4)} = \frac{s-2}{(s+1)(s+4)} = \frac{s-2}{s^2+5s+4}$$

由 $\beta_0=-2$，$\beta_1=1$，$\beta_2=0$；$\alpha_0=4$，$\alpha_1=5$，$\alpha_2=1$
则系统的能观测性标准型实现 (A_o, B_o, C_o) 为

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ B_o = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ C_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4C

当 $b=-1$ 时，给出系统的一个最小实现

Answer: 当 $b=-1$ 时，系统的传递函数可以写为：

$$G(s)=\frac{s^2-1}{s^3+7s^2+14s+8}=\frac{(s+1)(s-1)}{(s+1)(s+2)(s+4)}=\frac{s-1}{(s+2)(s+4)}=\frac{s-1}{s^2+6s+8}$$

由 $\beta_0=-1$，$\beta_1=1$，$\beta_2=0$；$\alpha_0=8$，$\alpha_1=6$，$\alpha_2=1$

要求上述系统的一个最小实现，则需要系统是既能控的又能观测的，如下为系统的一个能控性实现：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-8&-6&-1\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{pmatrix}-1&1&0\end{pmatrix}x(t)\end{cases}$$

记

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-8&-6&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}-1&1&0\end{pmatrix}$$

则有：

$$AB=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},A^2B=\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}$$

$$CA=\begin{pmatrix}0&-1&1\end{pmatrix},CA^2=\begin{pmatrix}-8&-6&-2\end{pmatrix}$$

则系统的能控性判别矩阵为:

$$Q_c=\begin{pmatrix}B&AB&A^2B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&-5\end{pmatrix}$$

则系统的能观测性判别矩阵为:

$$Q_o=\begin{pmatrix}C\\CA\\CA^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\-8&-6&-2\end{pmatrix}$$

则 $rankQ_c=3, rankQ_o=2$，则系统不是完全能观测的，且按照能观测性分解后能观测状态 $\bar{x_o}$ 为二维的，则选取非奇异变换矩阵

$$P=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

其中 P 的第一行和第二行分别为能观测性判别矩阵的第一行和第二行，且为线性无关的，第三行为任意选取使得 P 为非奇异的向量，显然 $rankP=3=n$，所以 P 可逆并且

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

对系统进行非奇异变换 $\bar{x}=Px$，通过计算可得：

$$\bar{A}=PAP^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -8 & -6 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 8 & 14 & 16\\ -8 & -14 & -15\end{pmatrix}$$

$$\bar{B}=PB=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\bar{C}=CP^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

则系统的完全能控能观测的部分为：

$$\dot{\bar{x}}_o(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 8 & 14\end{pmatrix}\bar{x}_o(t)+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t),\ y(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\bar{x}_o(t)$$

此即为系统的一个最小实现

Question 5

叙述线性定常系统的完全能观测性秩判据定理，并给出证明

Answer: (秩判据) 对于线性定常系统：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{cases}$$

为完全能观测的充分必要条件是：

$$rankQ_o=rank\begin{pmatrix}C & CA & \cdots & CA^{n-1}\end{pmatrix}^T=n$$

(充分性) 采用反证法，若系统为不完全能观测的，则由 Gram 矩阵判据可知，对于

$$W_o[0,t_1]=\int_0^{t_1}e^{A^Tt}C^TCe^{At}dt,\ \forall t>0$$

为奇异阵，即存在非零向量 α，使得：

$$0=\alpha^T W_o[0,t_1]\alpha=\int_0^{t_1}\alpha^T e^{-At}CC^T e^{-A^T t}\alpha dt==\int_0^{t_1}||C^T e^{-A^T t}\alpha||^2 dt$$

即

$$C^T e^{-A^T t}\alpha=0,\ \forall t\in[0,t_1]$$

对上式关于 t 求直到 $(n-1)$ 阶导数，再令 $t=0$ 可得

$$C^T\alpha=0, C^T A^T\alpha=0, C^T {A^T}^2\alpha=0, \dots, C^T {A^T}^{n-1}\alpha=0$$

从而

$$\begin{pmatrix}C & CA & \cdots & CA^{n-1}\end{pmatrix}^T\alpha=Q_o\alpha=0$$

由于 $\alpha\neq 0$，即表明 Q_o 为行线性相关，则 $rankQ_o<n$，这与之前假设 $rankQ_o=n$ 矛盾！

(必要性) 采用反证法，假设 $rankQ_o<n$，那么 Q_o 为行线性相关，因此必存在一个非零 n 维向量 α 使得

$$Q_o\alpha=\begin{pmatrix}C & CA & \cdots & CA^{n-1}\end{pmatrix}^T\alpha=0$$

即

$$C^T {A^T}^i\alpha=0,\ i=0,1,\dots,n-1$$

即

$$(\alpha^T A^i C)^T=0,\ i=0,1,\dots,n-1$$

即

$$\alpha^T A^i C=0,\ i=0,1,\dots,n-1$$

则由 Cayley-Hamilton 定理可知：$A^n, A^{n+1}, \dots$ 均可表示为 $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ 的线性组合，由此可得，对 $\forall t\in[0,t_1]$ 有：

$$\begin{aligned}0&=\alpha^T IC-\alpha^T AtC+\frac{1}{2!}\alpha^T A^2t^2C+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\alpha^T A^n t^n C+\cdots\\&=\alpha^T[I-At+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}A^n t^n+\cdots]C\\&=\alpha^T e^{-At}C\end{aligned}$$

于是可得：

$$0=\int_0^{t_1}\alpha^T e^{-At}CC^T e^{-A^T t}\alpha dt=\alpha^T(\int_0^{t_1}e^{-At}CC^T e^{-A^T t}dt)\alpha=\alpha^T W_o[0,t_1]\alpha$$

这表明 Gram 矩阵 $W[0,t_1]$ 是奇异的，从而系统为不完全能观测的，与假设矛盾！

综上，我们证明了线性定常系统的完全能观测性秩判据定理