Assignment 3

Control Theory, Professor Wang

Su Kezheng | 2012604 | 748527866@qq.com

Question 1

已知线性定常系统为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

1A

判断系统是否为完全能控的，是否为完全能观测的

Answer: 不妨记：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = (0 \quad 1 \quad -1)$$

则有：

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A^2B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$CA = (1 \quad -1 \quad 0), CA^2 = (-1 \quad 0 \quad 2)$$

则系统的能控性判别矩阵为：

$$Q_c = (B \quad AB \quad A^2B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

则系统的能观测性矩阵为：

$$Q_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

显然 $rankQ_c = 2, rankQ_o = 3$

则系统不是完全能控的，但是完全能观测的

1B

求系统的能控性子系统，求系统的能观测性子系统

Answer: 由于 $rankQ_c = 2 < n = 3$，则系统状态不是完全能控的，且按能控性结构分解之后能控状态 $\bar{x}_c$ 是二维的，则由定理 3.3.3 选取非奇异变换矩阵 P 使得

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

其中 P^{-1} 的第一列和第二列分别为 Q_c 的的第一列和第二列，他们线性无关，P^{-1} 的第三列为任意选取的使得 P^{-1} 非奇异的列向量，显然 $rankP^{-1} = 3 = n$，所以 P^{-1} 非奇异且

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

对原系统进行非奇异变换 $\bar{x}(t) = Px(t)$，通过计算得到：

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{B} = PB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C} = CP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

所以系统按能控性分解后的状态空间描述为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_c(t) \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_c(t) \\ \bar{x}_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_c(t) \\ \bar{x}_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

系统的低维能控子系统为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_c(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \bar{x}_c(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_c(t) \\ \bar{x}_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

由 $rankQ_o = 3$，则系统已经是完全能观测的，无需分解

1C

给出系统按能控性和能观测性的结构分解 (Kalman 分解)

Answer: 由于 $rankQ_c = 2, rankQ_o = 3$，即系统不是完全能控的，但是完全能观测的

由于系统的特征方程为:

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^3$$

则矩阵 A 有三重根 $\lambda = -1$，则将其化为 Jordan 标准型，其变换矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

则将其化为 Jordan 标准型:

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{B} = P^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C} = CP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则系统状态表达式为:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

则可以判定系统能控且能观测的状态变量为 $x_2(t)$，不能控但能观测的状态变量为 $x_1(t)$，能控但不能观测的状态变量为 $x_3(t)$，则系统按能控性和能观测性 Kalman 分解的规范式为:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_{co}(t) \\ \dot{\tilde{x}}_{c\bar{o}}(t) \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}o}(t) \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{co}(t) \\ \tilde{x}_{c\bar{o}}(t) \\ \tilde{x}_{\bar{c}o}(t) \\ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{co}(t) \\ \tilde{x}_{c\bar{o}}(t) \\ \tilde{x}_{\bar{c}o}(t) \\ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Question 2

已知线性定常系统为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

2A

判断系统是否为完全传播的，是否为完全能观测的

Answer: 不妨记：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

则有：

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, A^2B = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}, CA^2 = \begin{pmatrix} -5 & 13 & -10 \end{pmatrix}$$

则系统的能控性判别矩阵为：

$$Q_c = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

则系统的能观测性矩阵为：

$$Q_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ -5 & 13 & -10 \end{pmatrix}$$

显然 $rankQ_c = 3, rankQ_o = 3$

则系统是完全能控的，且是完全能观测的

2B

给出系统的能控标准型，给出系统的能观测标准型

Answer: 由于系统的特征多项式为：

$$\alpha(s) = det(sI - A) = det \begin{pmatrix} s & -2 & 2 \\ -1 & s-1 & 2 \\ -2 & 2 & s-1 \end{pmatrix} = s^3 - 2s^2 - s + 2$$

所以 $\alpha_0 = 2$，$\alpha_1 = -1$，$\alpha_2 = -2$，则有：

$$\begin{cases} \beta_2 = CB = 5 \\ \beta_1 = CAB + \alpha_2 CB = -3 \\ \beta_0 = CA^2B + \alpha_2 CAB + \alpha_1 CB = -26 \end{cases}$$

于是系统的能控规范型为：

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \bar{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} -26 & -3 & 5 \end{pmatrix} \bar{x}(t) \end{cases}$$

于是系统的能观测规范型为：

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} -26 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{x}(t) \end{cases}$$

Question 3

设系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} b \\ -1 \end{pmatrix} u(t)$$

试确定满足状态完全能控条件的 a 和 b

Answer: 不妨记：

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b \\ -1 \end{pmatrix}$$

则有：

$$AB = \begin{pmatrix} ab - 1 \\ -b \end{pmatrix}$$

则系统的能控性判别矩阵为:

$$Q_c = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} b & ab-1 \\ -1 & -b \end{pmatrix}$$

要求系统是完全能控的，则需要有 $rankQ_c = 2 \Rightarrow ab - b^2 - 1 \neq 0$

Question 4

已知系统的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

试确定满足状态完全能控和完全能观测条件的 a 和 b

Answer: 不妨记:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1 \quad -1)$$

则有:

$$AB = \begin{pmatrix} a+1 \\ b \end{pmatrix}, CA = (a \quad 1-b)$$

则系统的能控性判别矩阵为:

$$Q_c = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

则系统的能观测性矩阵为:

$$Q_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 1-b \end{pmatrix}$$

若系统是完全能控、完全能观测的，则要求: $rankQ_c = 3, rankQ_o = 3$，即

$$\Rightarrow \ a - b + 1 \neq 0$$

Question 5

已知系统的传递函数为: $G(s) = \dfrac{s+a}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$

5A

当 a 取什么值时，系统是不能控的或不能观测的

Answer: 系统的传递函数可以写为：

$$G(s) = \frac{s+a}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

当 $a = 1,2,4$ 时，系统传递函数出现零极点对消现象，则系统是不能控的或不能观测的

5B

当 a 取适当的值时，给出系统的一个能控性标准型的实现

Answer: 由 $\beta_0 = a$，$\beta_1 = 1$，$\beta_2 = 0$；$\alpha_0 = 8$，$\alpha_1 = 14$，$\alpha_2 = 7$

则系统的能控性标准型实现 (A_c, B_c, C_c) 为

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{pmatrix},\ B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ C_c = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5C

当 a 取适当的值时，给出系统的一个能观测性标准型的实现

Answer: 由 $\beta_0 = a$，$\beta_1 = 1$，$\beta_2 = 0$；$\alpha_0 = 8$，$\alpha_1 = 14$，$\alpha_2 = 7$

则系统的能观测性标准型实现 (A_o, B_o, C_o) 为

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix},\ B_o = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ C_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5D

求系统的一个最小实现

Answer: 要求上述系统的一个最小实现，则需要系统是既能控的又能观测的，即 $a \neq 1,2,4$，此时不妨取 $a = 0$，则如下即为系统的一个最小实现：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

且验证有 $rankQ_c = 3, rankQ_o = 3$，即为系统的一个最小实现

Question 6

设系统 Σ_1 和 Σ_2 的状态方程为

$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot{x}_1(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\-3 & -4\end{pmatrix}x_1(t)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u_1(t)\\ y_1(t)=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}x_1(t)\end{cases},\Sigma_2:\begin{cases}\dot{x}_2(t)=-2x_2(t)+u_2(t)\\ y_2(t)=x_2(t)\end{cases}$$

6A

求出 Σ_1 和 Σ_2 所组成的串联系统，并判断串联系统的能控性和能观测性

Answer: 不妨记：

$$A_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\-3 & -4\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}$$
$$A_2=-2,\ B_2=1,\ C_2=1$$

则串联组合系统 $\Sigma_1-\Sigma_2$ 的状态空间描述为：

$$\Sigma_1-\Sigma_2:\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-3 & -4 & 0\\2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}\end{cases}$$

不妨记：

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-3 & -4 & 0\\2 & 1 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则有：

$$AB=\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix},\ A^2B=\begin{pmatrix}-4\\13\\-4\end{pmatrix}$$
$$CA=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\end{pmatrix},\ CA^2=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 4\end{pmatrix}$$

则系统的能控性判别矩阵为：

$$Q_c=\begin{pmatrix}B & AB & A^2B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -4\\1 & -4 & 13\\0 & 1 & -4\end{pmatrix}$$

则系统的能观测性矩阵为：

$$Q_o=\begin{pmatrix}C\\CA\\CA^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\2 & 1 & -2\\-7 & -4 & 4\end{pmatrix}$$

显然 $rankQ_c = 2, rankQ_o = 3$，即串联系统不是完全能控，但是完全能观测的

6B

求出 Σ_1 和 Σ_2 所组成的并联系统，并判断并联系统的能控性和能观测性

Answer: 并联组合系统 $\Sigma_1 - \Sigma_2$ 的状态空间描述为：

$$\Sigma_p : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

不妨记：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则有：

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, A^2B = \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}, CA^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

则系统的能控性判别矩阵为：

$$Q_c = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 13 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

则系统的能观测性矩阵为：

$$Q_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

显然 $rankQ_c = 3, rankQ_o = 3$，即并联系统是完全能控，且是完全能观测的

Question 7

已知 n 阶系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

并且 $CB=0, CAB=0, \dots, CA^{n-1}B=0$，证明系统或是不完全能控的，或是不完全能观测的

Answer: 由 $CB=0, CAB=0, \dots, CA^{n-1}B=0$

对于系统的能控性判别矩阵为：

$$Q_c = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

则有：

$$CQ_c = C\begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

对于系统的能观测性矩阵为：

$$Q_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

则有：

$$Q_oB = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} CB \\ CAB \\ \vdots \\ CA^{n-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(反证法). 若系统既是完全能控的，也是完全能观测的，则判别矩阵 Q_c，Q_o 均为秩满的，则由线性方程组的解定理可知，上两方程组均只有零解，即 $C=0, B=0$，此时 n 阶系统的状态空间表达式为：

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

显然矛盾！故系统不能既是完全能控的，又是完全能观测的

综上，系统或是不完全能控的，或是不完全能观测的

Question 8

已知系统的传递函数为：

$$G(s) = \frac{\beta^{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta^1 s^1 + \beta}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0},\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n-1$$

给出系统的能观测标准型实现，并加以证明

Answer: 由系统的传递函数严格真，且可表示为有理分式函数，则有：

$$\beta_0 = \beta,\ \beta_1 = \beta^1, \dots\ \beta_{n-1} = \beta^{n-1},$$

则系统的能观测标准型实现 (A_o, b_o, c_o) 为：

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & & & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix},\ b_o = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^{n-1} \end{pmatrix},\ c_o = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

下对此加以证明：

$$(sI-A)^{-1} = \frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)} = \frac{1}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} \begin{pmatrix} * & \begin{matrix} 1 \\ \overline{s} \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_o(sI-A)^{-1}b_o =& \frac{1}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \begin{matrix} 1 \\ \overline{s} \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^0 \\ \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^{n-1} \end{pmatrix} \\ =& \frac{\beta^{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta^1 s^1 + \beta}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} = G(s) \end{aligned}$$

Question 9

已知一个多输入多输出系统的传递函数矩阵为

$$G(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+3} \\ -\dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

给出系统的能控标准型实现

Answer: 由系统的传递函数矩阵 $G(s)$ 为严格真的，且可以表示为如下有理分式矩阵形式：

$$\begin{aligned} G(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+3} \\ -\dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s+2} \end{pmatrix} &= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{pmatrix} (s+2)(s+3) & (s+1)(s+2) \\ -(s+2)(s+3) & -(s+1)(s+3) \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} s^2 + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

则 $\alpha_0 = 6$，$\alpha_1 = 11$，$\alpha_2 = 6$，$P_0 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$，$P_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$，$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

则系统的能控性实现 (A_c,B_c,C_c) 为

$$A_c=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\-6&0&-11&0&-6&0\\0&-6&0&-11&0&-6\end{pmatrix}$$

$$B_c=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$C_c=\begin{pmatrix}6&2&5&3&1&1\\-6&-3&-5&-4&-1&-1\end{pmatrix}$$

下面将其化为能控规范型，由：

$$A_cB_c=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\\-6&0\\0&-6\end{pmatrix},\ A_c^2B_c=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-6&0\\0&-6\\25&0\\0&25\end{pmatrix},\ A_c^3B_c=\begin{pmatrix}-6&0\\0&-6\\25&0\\0&25\\-90&0\\0&-90\end{pmatrix}$$

$$A_c^4B_c=\begin{pmatrix}25&0\\0&25\\-90&0\\0&-90\\301&0\\0&301\end{pmatrix},\ A_c^5B_c=\begin{pmatrix}-90&0\\0&-90\\301&0\\0&301\\-966&0\\0&-966\end{pmatrix}$$

则系统能控性判别矩阵为：

$$Q_c=\begin{pmatrix}B_c & A_cB_c & A_c^2B_c & A_c^3B_c & A_c^4B_c & A_c^5B_c\end{pmatrix}$$

且有 $rankQ_c=6$，则系统是完全能控的，对 Q_c 按列搜索可知 Q_c 的 6 个线性无关列为 $\{b_1,Ab_1,A^2b_1,b_2,Ab_2,A^2b_2\}$，所以 $\mu_1=3,\mu_2=3$，记

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}b_1 & Ab_1 & A^2b_1 & b_2 & Ab_2 & A^2b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&-6&0\\0&0&0&1&0&-6\\1&0&-6&0&25&0\\0&1&0&-6&0&25\end{pmatrix}$$

则

$$P=\begin{pmatrix}11&0&6&0&1&0\\0&11&0&6&0&1\\6&0&1&0&0&0\\0&6&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_{11}^T\\e_{12}^T\\e_{13}^T\\e_{21}^T\\e_{22}^T\\e_{23}^T\end{pmatrix}$$

取 P 的 e_{13}^T 和 e_{23}^T 构造变换矩阵如下：

$$T=\begin{pmatrix}e_{13}^T\\e_{23}^T\\e_{13}^TA\\e_{23}^TA\\e_{13}^TA^2\\e_{23}^TA^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&6&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\-6&0&11&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},\ T^{-1}=\begin{pmatrix}11/72&0&1&0&-1/72&0\\0&1&0&0&0&0\\1/12&0&0&0&1/12&0\\0&0&0&1&0&0\\-1/2&0&1&0&-1/2&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

因此，系统的 Luenberger 能控规范型为：

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}(t)=\bar{A}_c\bar{x}(t)+\bar{B}_cu(t)\\ \bar{y}(t)=\bar{C}\bar{x}(t)\end{cases}$$

其中

$$\bar{A}_c=TAT^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\-6&0&-11&0&-6&0\\0&-6&0&-11&0&-6\end{pmatrix},\ \bar{B}_c=TB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\bar{C}=CT^{-1}=\begin{pmatrix}5/6&2&1&3&-1/6&1\\-5/6&-3&-1&-4&1/6&-1\end{pmatrix}$$

Question 10

叙述并证明线性定常系统按能观测的结构分解定理

Answer: 对于不完全能观测的多输入-多输出线性定常系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{cases}$$

引入线性非奇异变换 $\hat{x}=Px$，则可以给出系统结构按能观测性分解的规范表达式为：

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{\hat{x}}_o(t)\\ \dot{\hat{x}}_{\bar{o}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{A}_o & 0\\ \hat{A}_{12} & \hat{A}_{\bar{o}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}_o(t)\\ \hat{x}_{\bar{o}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\hat{B}_o\\ \hat{B}_{\bar{o}}\end{pmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{pmatrix}\hat{C}_o & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}_o(t)\\ \hat{x}_{\bar{o}}(t)\end{pmatrix}\end{cases}$$

其中 $\hat{x}_o(t)$ 为 m 维能观测分状态，$\hat{x}_{\bar{o}}(t)$ 为 $n-m$ 维不能观测分状态，且 $m=rankQ_o$

下面给出证明：

在能观测判别矩阵 $Q_o=\begin{pmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{pmatrix}$ 中任意选取 m 个线性无关的行，记为 $h_1,h_2,\dots,h_m$，再在 n 维实向量空间中任意选取 $n-m$ 个行向量 $h_{m+1},\dots,h_n$ 使它们与 $\{h_1,h_2,\dots,h_m\}$ 线性无关，这样可以组成一个非奇异变换矩阵：

$$P=\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_m\\ h_{m+1}\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$$

利用此变换矩阵，对系统的结构按能观测性进行分解，设

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}g_1^T & \cdots & g_n^T\end{pmatrix}$$

则由 $PP^{-1}=I$ 可得：$h_ig_j^T=0,\forall i\neq j$，进而对 $i\leqslant m$，h_iA 是 $\{h_1,\dots,h_m\}$ 的线性组合，所以有：$h_iAg_j^T=0,(i=1,\dots,m,\ j=m+1,\dots,n)$，从而：

$$\bar{A}=PAP^{-1}==\begin{pmatrix}h_1Ag_1^T & \cdots & h_1Ag_m^T & h_1Ag_{m+1}^T & \cdots & h_1Ag_n^T\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ h_mAg_1^T & \cdots & h_mAg_m^T & h_mAg_{m+1}^T & \cdots & h_mAg_n^T\\ h_{m+1}Ag_1^T & \cdots & h_{m+1}Ag_m^T & h_{m+1}Ag_{m+1}^T & \cdots & h_{m+1}Ag_n^T\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ h_nAg_1^T & \cdots & h_nAg_m^T & h_nAg_{m+1}^T & \cdots & h_nAg_n^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{A}_o & 0\\ \hat{A}_{12} & \hat{A}_{\bar{o}}\end{pmatrix}$$

同样，C 的所有行也均可以表示为 $\{h_1,\dots,h_m\}$ 的线性组合，因而可得：

$$\bar{C}=CP^{-1}=\begin{pmatrix}Cg_1^T & \cdots & Cg_m^T & Cg_{m+1}^T & \cdots & Cg_n^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{C}_o & 0\end{pmatrix}$$

而 B 无特殊形式，为：

$$B=PB=\begin{pmatrix}h_1B\\ \vdots\\ h_mB\\ h_{m+1}B\\ \vdots\\ h_nB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{B}_o\\ \hat{B}_{\bar{o}}\end{pmatrix}$$

这样就得到了规范表达式，由于

$$m = rankQ_o = rank\hat{Q}_o = rank\begin{pmatrix} \hat{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\hat{A}^{n-1} \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} \hat{C} & 0 \\ \bar{C}\bar{A} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{C}\hat{A}^{n-1} & 0 \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} \hat{C}_o \\ \hat{C}_o\hat{A}_o \\ \vdots \\ \hat{C}_o\hat{A}_o^{n-1} \end{pmatrix}$$

又因为 $\hat{A}_o$ 为 $k \times k$ 数值矩阵，由 Cayley-Hamilton 定理可知：$\hat{C}_o\hat{A}_o^m, \dots, \hat{C}_o\hat{A}_o^{n-1}$ 均可表示为 $\{\hat{C}_o, \hat{C}_o\hat{A}_o, \dots, \hat{C}_o\hat{A}_o^{m-1}\}$ 的线性组合，因此

$$rank\begin{pmatrix} \hat{C}_o \\ \hat{C}_o\hat{A}_o \\ \vdots \\ \hat{C}_o\hat{A}_o^{m-1} \end{pmatrix} = m$$

这表明 $(\hat{A}_o, \hat{C}_o)$ 为能观测的，即 $\hat{x}_o(t)$ 为 m 维能观测分状态

Question 11

已知线性定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

给出系统按能控性分解的规范表达式

Answer: 不妨记：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则有：

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A^2B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

则系统的能控性判别矩阵为：

$$Q_c = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

由于 $rankQ_c = 2 < n = 3$，则系统状态不是完全能控的，且按能控性结构分解之后能控状态 $\bar{x}_c$ 是二维的，则由定理 3.3.3 选取非奇异变换矩阵 P 使得

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 P^{-1} 的第一列和第二列分别为 Q_c 的的第一列和第二列，他们线性无关，P^{-1} 的第三列为任意选取的使得 P^{-1} 非奇异的列向量，显然 $rankP^{-1} = 3 = n$，所以 P^{-1} 非奇异且

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

对原系统进行非奇异变换 $\bar{x}(t) = Px(t)$，通过计算得到：

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{B} = PB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C} = CP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

所以系统按能控性分解的规范表达式为：

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_c(t) \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_c(t) \\ \bar{x}_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_c(t) \\ \bar{x}_{\bar{c}}(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$