

# Assignment 2

## Control Theory, Professor Wang

Su Kezheng | 2012604 | 748527866@qq.com

Question 1	.....	1
Question 2	.....	2
2A	.....	2
2B	.....	3
2C	.....	3
Question 3	.....	4
Question 4	.....	5
Question 5	.....	6
Question 6	.....	7
6A	.....	7
6B	.....	7
Question 7	.....	8
Question 8	.....	8

## Question 1

将系统的微分方程表示

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 2y = \ddot{u} + \dot{u} + 3u$$

化为系统的状态空间表达式，并求系统的状态转移矩阵

**Answer:** 由微分方程可知各项系数为：

$$a_3 = 1, a_2 = 4, a_1 = 2, a_0 = 1, b_3 = 0, b_2 = 1, b_1 = 1, b_0 = 3$$

则可以确定：

$$\begin{cases} h_0 = b_3 = 0 \\ h_1 = b_2 - a_2 h_0 = 1 \\ h_2 = b_1 - a_2 h_1 - a_1 h_0 = -3 \\ h_3 = b_0 - a_2 h_2 - a_1 h_1 - a_0 h_0 = 13 \end{cases}$$

所以系统的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} u(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + h_0 u(t) = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

对于线性定常系统, 其状态转移矩阵为  $\Phi(t,0) = \Phi(t) = e^{At}$

下面只要求系统矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$  的矩阵指数函数

首先由矩阵的特征方程  $|\lambda I - A| = 0$  求得系统的特征值为:

$$\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \neq \lambda_3 \in \mathbb{C}$$

即一个实特征根以及两个互异的复特征根, 又由矩阵  $A$  为友矩阵

## Question 2

将下列线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0]$$

### 2A

化为对角线标准形

**Answer:** 首先由矩阵  $A$  的特征方程  $|\lambda I - A| = 0$  求得系统的特征值为:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$$

则可求得与特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  对应的特征向量分别为:

$$p_1 = (1 \ -1 \ 1)^T, p_2 = (1 \ -2 \ 4)^T, p_3 = (1 \ -3 \ 9)^T$$

则将  $A$  对角化的变换矩阵  $P$  及其逆矩阵  $P^{-1}$  分别为:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5/2 & 1/2 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

即

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

## 2B

求系统的状态转移矩阵

**Answer:** 由于对于线性定常系统其状态转移矩阵为:  $\Phi(t) = e^{At}$ , 则有:

$$\begin{aligned} e^{At} &= P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} & 5e^{-t}/2 - 4e^{-2t} + 3e^{-3t}/2 & e^{-t}/2 - e^{-2t} + e^{-3t}/2 \\ -3e^{-t} + 6e^{-2t} - 3e^{-3t} & -5e^{-t}/2 + 8e^{-2t} - 9e^{-3t}/2 & -e^{-t}/2 + 2e^{-2t} - 3e^{-3t}/2 \\ 3e^{-t} - 12e^{-2t} + 9e^{-3t} & 5e^{-t}/2 - 16e^{-2t} + 27e^{-3t}/2 & e^{-t}/2 - 4e^{-2t} + 9e^{-3t}/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 2C

求系统的状态方程的输出方程的解 ( $x(t_0) = x_0$ )

**Answer:** 对于线性定常系统的输出为:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \\ &= \Phi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} 3e^{-t} - 6e^{-2t} + 3e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 12e^{-2t} - 9e^{-3t} \\ 3e^{-t} - 24e^{-2t} + 27e^{-3t} \end{pmatrix} u(\tau)d\tau \\ y(t) &= [1 \ 0 \ 0]x(t) \end{aligned}$$

## Question 3

已知线性定常系统的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

试将  $A$  化为 Jordan 标准形

**Answer:** 首先由矩阵  $A$  的特征方程  $|\lambda I - A| = 0$  求得系统的特征值为:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

即存在一个二重根 1, 当取  $\lambda = 1$ , 由方程

$$(\lambda I - A)P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} = 0$$

可得  $p_{31} = 0$ ,  $p_{11}$  和  $p_{21}$  可取任意值

分别令  $p_{11} = 1, p_{21} = 0$  以及  $p_{11} = 0, p_{21} = 1$  可得两个独立特征向量

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

同理由  $\lambda = 2$ , 可得特征向量

$$P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则可得非奇异变换矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则  $A$  在上述矩阵作用下化为 Jordan 标准形为

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## Question 4

已知线性定常系统的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

试将  $A$  化为模态规范形

**Answer:** 首先由矩阵  $A$  的特征方程  $|\lambda I - A| = 0$  求得系统的特征值为:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1 + j, \lambda_3 = -1 - j$$

当取  $\lambda_1 = -1$ , 由方程

$$(\lambda I - A)Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{pmatrix} = 0$$

任取  $q_{11} = 1$ , 可得  $q_{31} = q$ , 和  $q_{21} = -1$ , 即:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

当取  $\lambda_2 = -1 + j$ , 由方程

$$(\lambda I - A)Q_2 = \begin{pmatrix} -1 + j & -1 & 0 \\ 0 & -1 + j & -1 \\ 2 & 4 & 2 + j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \end{pmatrix} = 0$$

任取  $q_{12} = 1$ , 可得  $q_{22} = -1 + j$ , 和  $q_{32} = -2j$ , 即:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + j \\ -2j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

则可得变换矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以  $A$  的模态规范形为:

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \omega \\ 0 & -\omega & \sigma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Question 5

已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

分别计算矩阵指数函数  $e^{At}$ ,  $e^{Bt}$ ,  $e^{(A+B)t}$ , 并说明为什么  $e^{At}e^{Bt} \neq e^{(A+B)t}$

**Answer:** 首先由矩阵  $A$  的特征方程  $|\lambda I - A| = 0$  求得系统的特征值为:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

此时方程已化为 Jordan 标准形, 即:

$$I^{-1}AI = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是矩阵  $A$  的状态转移矩阵为:

$$e^{At} = I \begin{pmatrix} e^{0t} & te^{0t} \\ 0 & e^{0t} \end{pmatrix} I^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

下求矩阵  $B$  的状态转移矩阵, 先求出矩阵  $B$  的预解矩阵:

$$(sI - B)^{-1} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 1 & s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ -\frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

则对上式两边做 Laplace 逆变换可得:

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

对于矩阵  $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , 同理由 Laplace 变换法可得:

$$e^{(A+B)t} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

解释为什么  $e^{At}e^{Bt} \neq e^{(A+B)t}$ :

对于 Laplace 变换法求矩阵函数, 由于对于矩阵运算  $A^{-1}B^{-1} \neq (A+B)^{-1}$ , 故

$$e^{At}e^{Bt} \neq e^{(A+B)t}$$

## Question 6

证明以下结论:

### 6A

已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

证明:

$$e^{At} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Answer:** 由于此时方程已化为 Jordan 标准形, 即:

$$I^{-1}AI = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

则矩阵  $A$  的矩阵指数函数为:

$$e^{At} = I \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} I^{-1} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 6B

已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

证明:

$$e^{At} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

**Answer:** 先求出矩阵  $A$  的预解矩阵:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s - \alpha & -\beta \\ \beta & s - \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} & \frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \\ -\frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} & \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \end{pmatrix}$$

则对上式两边做 Laplace 逆变换可得:

$$e^{At} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

## Question 7

证明二阶矩阵  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  的特征多项式可以写为:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A$$

其中

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2, \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \lambda_1\lambda_2$$

**Answer:** 由矩阵  $A$  的特征方程  $|\lambda I - A| = 0$  可得:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= |\lambda I - A| = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{21}a_{12} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ &= \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A \end{aligned}$$

## Question 8



已知线性定常连续系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0) x(t) \end{cases}$$

采取采样周期为  $T = 1$ ，求离散化后系统的离散状态空间表达式

**Answer:** 记  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = (1 \ 0)$ ,  $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  则上述线性定常系统的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), t \geq 0 \end{cases}$$

此时  $G(k) = e^{AT} = G$ ,  $H(k) = B$ ，由采样周期为  $T = 1$

先求出矩阵  $A$  的预解矩阵:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s-2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s-2)} \\ 0 & \frac{1}{s-2} \end{pmatrix}$$

则对上式两边做 Laplace 逆变换可得:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1-e^{2t}}{2} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

即离散化后系统的离散状态空间表达式为:

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1-e^{2t}}{2} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) = (1 \ 0) x(k) \end{cases}$$