Assignment 1

Control Theory, Professor Wang

Su Kezheng | 2012604 | 748527866@qq.com

Question 1

已知系统的 Lagrange 函数为

$$L(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta + mgRcos\theta$$

1A

求系统的 Euler-Lagrange 方程

Answer:

由系统的 Lagrange 函数可得：

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\ddot{\theta}$$

则系统的 Euler-Lagrange 方程为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

代入得：

$$mR^2\ddot{\theta} = mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta$$

整理得：

$$R\ddot{\theta} + g\sin\theta - R\omega^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

1B

通过计算验证系统的 Hamilton 函数为

$$H(\theta,p) = \frac{p^2}{2mR^2} - mgR\cos\theta - \frac{mR^2\omega^2}{2}\sin^2\theta$$

Answer:

由定义有:

$$H(\theta,p)=\dot{\theta}p-L=\frac{p^2}{2mR^2}-mgR\cos\theta-\frac{mR^2\omega^2}{2}\sin^2\theta$$

系统的状态方程为:

$$\dot{\theta}=\frac{1}{mR^2}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{p}{mR^2}=\frac{\partial H(\theta,p)}{\partial p}$$

系统的协态方程为:

$$\dot{p}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\partial L}{\partial\theta}=mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta-mgR\sin\theta=-\frac{\partial H(\theta,p)}{\partial\theta}$$

综上可知，系统的 Hamilton 函数为

$$H(\theta,p)=\frac{p^2}{2mR^2}-mgR\cos\theta-\frac{mR^2\omega^2}{2}\sin^2\theta$$

1C

求出系统的 Hamilton 方程

Answer:

系统的状态方程为:

$$\dot{\theta}=\frac{1}{mR^2}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{p}{mR^2}=\frac{\partial H(\theta,p)}{\partial p}$$

系统的协态方程为:

$$\dot{p}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\partial L}{\partial\theta}=mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta-mgR\sin\theta=-\frac{\partial H(\theta,p)}{\partial\theta}$$

综上可知，系统的 Hamilton 方程为

$$\begin{cases}\dot{\theta}=\dfrac{p}{mR^2}\\ \\ \dot{p}=mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta-mgR\sin\theta\end{cases}$$

Question 2

已知系统的 Lagrange 函数为

$$L(q,v)=\frac{1}{2}v^2+qv-q^2-q^4$$

2A

求出系统的 Euler-Lagrange 方程

Answer:

由系统的 Lagrange 函数可得:

$$\frac{\partial L}{\partial q}=v-2q-4q^3$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial L}{\partial v}=v+q\,,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=\dot{v}+\dot{q}$$

则系统的 Euler-Lagrange 方程为:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\frac{\partial L}{\partial \theta}$$

代入得:

$$v-2q-4q^3=\dot{v}+\dot{q}$$

整理得:

$$\ddot{q}+2q+4q^3=0$$

2B

求出系统的 Hamilton 函数和 Hamilton 方程

Answer:

首先计算广义动量可得:

$$p=\frac{\partial L}{\partial v}=v+q$$

由定义得到系统的 Hamilton 函数为:

$$H(q,p)=\dot{q}p-L=q^4+\frac{3}{2}q^2-pq+\frac{1}{2}p^2$$

系统的状态方程为:

$$\dot{q}=p-q=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p}$$

系统的协态方程为:

$$\dot{p}=\ddot{q}+\dot{q}=-4q^3-2q+\dot{q}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q}$$

综上可知，系统的 Hamilton 方程为

$$\begin{cases} \dot{q} = p - q \\ \\ \dot{p} = -4q^3 - 2q + \dot{q} \end{cases}$$

2C

通过 Legendre 变换，证明系统的 Hamilton 方程和系统的 Euler-Lagrange 方程是等价的

Answer:

首先定义系统广义动量：

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = v + q$$

则利用 Legendre 变换构造函数：

$$H = \dot{q}p - L$$

对其求微分可得：

$$\mathrm{d}H = (\dot{q}\mathrm{d}p + p\mathrm{d}\dot{q}) - \mathrm{d}L$$

其中：

$$\mathrm{d}L = (\dot{q}\mathrm{d}p + \dot{p}\mathrm{d}q) - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t$$

代入可得：

$$\mathrm{d}H = (\dot{q}\mathrm{d}p - \dot{p}\mathrm{d}q) - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t$$

于是得到：

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t} \end{cases}$$

即系统的 Hamilton 方程和系统的 Euler-Lagrange 方程是等价的

Question 3

给出天体力学二体问题的 Hamilton 函数，并求出二体问题的 Hamilton 方程，通过质心运动守恒，将方程化简

Answer: 不妨设两质点质量分别为 m_1,m_2，位矢为 r_1,r_2，由角动量守恒二体运动共平面
设 r_c 为质心位矢，r 为二体相对位矢，那么有：

$$\begin{cases} r_c = \dfrac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \\ \\ r = r_2 - r_1 \end{cases}$$

由系统的动能为质心动能加系统相对质心参考系的动能

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r_c}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{r}^2 = \frac{1}{2}M\dot{r_c}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$$

其中 M 为系统总质量，$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 为约化质量

在无外力的情况下，$\dot{r_c} = 0$，系统的势能为 $V(r)$，因此系统的 Lagrange 函数为：

$$L = T - V = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\mu\rho^2\dot{\theta}^2 - V(\rho)$$

则系统的 Hamilton 函数为：

$$H = T + V = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\mu\rho^2\dot{\theta}^2 + V(\rho)$$

定义广义动量为：

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \mu\dot{\rho}$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu\rho^2\dot{\theta}$$

则系统的 Hamilton 函数为：

$$H = \frac{p_1^2}{2\mu} + \frac{p_2^2}{2\mu\rho^2} + V(\rho)$$

则系统的 Hamilton 方程为：

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \dfrac{p_1}{\mu} \\ \dot{p_1} = \dfrac{p_2^2}{\mu\rho^3} - V'(\rho) \\ \dot{\theta} = \dfrac{p_2}{\mu\rho^2} \\ \dot{p_2} = 0 \end{cases}$$

Question 4

已知系统的 Hamilton 函数为：

$$H(\Pi, P) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Pi_1^2}{I_1} + \frac{\Pi_2^2}{I_2} + \frac{\Pi_3^2}{I_3}\right) + MglP \cdot x$$

并且 Poisson 括号为：

$$\{F, G\}(\Pi, P) = -\Pi \cdot (\nabla_\Pi F \times \nabla_\Pi G) - P \cdot (\nabla_\Pi F \times \nabla_P G - \nabla_\Pi G \times \nabla_P F)$$

求出系统的 Hamilton 方程

Answer: 对于重陀螺刚体，我们定义如下物理量：

共轭角动量：

$$\Pi_i = \frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = I_i \Omega_i$$

重陀螺的 Hamilton 函数：

$$H(\Pi, P) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Pi_1^2}{I_1} + \frac{\Pi_2^2}{I_2} + \frac{\Pi_3^2}{I_3}\right) + MglP \cdot x$$

重陀螺的 Poisson 括号为：

$$\{F, G\}(\Pi, P) = -\Pi \cdot (\nabla_\Pi F \times \nabla_\Pi G) - P \cdot (\nabla_\Pi F \times \nabla_P G - \nabla_\Pi G \times \nabla_P F)$$

由泊松括号表示 Hamilton 方程可知：

$$\dot{\Pi} = \{\Pi, H\},\ \dot{P} = \{P, H\}$$

则代入上式可得：

$$\dot{\Pi} = \{\Pi, H\} = -\Pi \cdot (\nabla_\Pi \Pi \times \nabla_\Pi H) = -\nabla_\Pi \Pi \cdot (\nabla_\Pi H \times \Pi)$$

由 $\nabla_\Pi \Pi = (1, 1, 1)$、$\nabla_\Pi H = \dfrac{\Pi_i}{I_i} = \Omega_i$，可得：

$$\dot{\Pi} = \Pi \times \nabla_\Pi H = \Pi \times \Omega + mghP \times x$$

同理可得：

$$\dot{P} = \{P, H\} = P \times \Omega$$

综上系统的 Hamilton 方程为：

$$\begin{cases} \dot{\Pi} = \Pi \times \Omega + mghP \times x \\ \\ \dot{P} = P \times \Omega \end{cases}$$