微分流形

苏可铮　2012604

December 5, 2022

习题 1. 利用单位分解证明：任意微分流形上均存在黎曼度量

证明. 取 M 的图册 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$，令 $M = \cup_\alpha U_\alpha$ 为流形 M 的覆盖

对 $\forall \alpha$，考虑 U_α 的黎曼度量 g_α，且矩阵 $\big((g_\alpha)_{ij}\big)$ 为单位矩阵，令 $\{\rho_\alpha\}$ 为流形 M 的光滑单位分解，且满足：

$$\{\rho_\alpha : M \to [0,1]\}\,,\ supp(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$$

则有：

$$\sum_i \rho_i(x) = 1\,,\ \forall x \in M$$

令 $g = \sum\limits_\alpha \rho_\alpha g_\alpha$，则 g 是良定义的并且是光滑的，下面验证其为黎曼度量：

1. 线性性：

$$g(ax + bz, y) = a \cdot g(x, y) + b \cdot g(z, y)\,, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

2. 对称性：

$$g(x, y) = g(y, x)$$

3. 正定性：

$$g(x, y) \geqslant 0\,,\ g(0, 0) = 0$$

综上，g 为流形 M 的黎曼度量 □

习题 2. 记 $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ 为包含映射，$g_0 = \sum\limits_{i=0}^{n} dx^i \otimes dx^i$，选择 S^n 的适当局部坐标，在此坐标下写出拉回度量 $i^* g_0$ 的表达式

证明. 由题，显然 g_0 为黎曼度量，要求 $i^* g_0$ 在 S^n 的局部坐标 $(dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$ 下的表达式，令：

$$N = \left\{x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}\right\}$$

$$U = \left\{x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\right\}$$

则构造如下映射:

$$\phi: N \to U\,, \quad \phi(x^1, \dots, x^{n+1}) = (y^1, \dots, y^n)$$

$$\phi^{-1}: U \to N\,,\ \phi^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \Big(y^1, \dots, y^n, \sqrt{1-(y^1)^2-\dots-(y^n)^2}\Big)$$

则有:

$$(i \circ \phi^{-1})^*(dx^1) = dy^1$$

$$\dots\dots$$

$$(i \circ \phi^{-1})^*(dx^n) = dy^n$$

$$(i\circ\phi^{-1})^*(dx^{n+1}) = -\frac{y^1}{\sqrt{1-(y^1)^2-\dots-(y^n)^2}}dy^1 \cdots - \frac{y^1}{\sqrt{1-(y^n)^2-\dots-(y^n)^2}}dy^n$$

又由:

$$\phi^*(i \circ \phi^{-1})^*(\omega) = \Big((i \circ \phi^{-1}) \circ \phi\Big)^*(\omega) = i^*(\omega)$$

则有:

$$i^* g_0 = \delta_{ij} i^* dx^i \otimes i^* dx^j$$

$\square$

习题 **3.** 若 α，β，γ 分别为 r，s，t 阶反称斜变张量，则

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}\mathscr{A}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)$$

证明. 若 T，S，R 分别为 r，s，t 阶反称斜变张量，容易验证有:

Lemma3.1 $\mathscr{A}\big(\mathscr{A}(T \otimes S) \otimes R\big) = \mathscr{A}\big(T \otimes S \otimes R\big) = \mathscr{A}\big(T \otimes \mathscr{A}(S \otimes R)\big)$

且由

$$T \wedge S = \frac{(r+s)!}{r!s!}\mathscr{A}\big(T \otimes S\big)$$

则有

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma &= \frac{(r+s)!}{r!s!}\mathscr{A}(\alpha \otimes \beta) \wedge \gamma \\ &= \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}\mathscr{A}\big((\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma\big) \\ &= \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}\mathscr{A}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma) \\ &= \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}\mathscr{A}\big(\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)\big) \\ &= \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)\end{aligned}$$

$\square$