微分流形

苏可铮　2012604

November 28, 2022

习题 1. 设 E 为 M 上的向量丛，N 为 M 的正则子流形，令 $E_N = \bigcup\limits_{p\in N} E_p$，证明 E_N 为 E 的正则子流形，且为 N 上的向量丛，称为限制丛

证明. 定义映射 π:

$$\pi : E_N \to N,\ \pi(E_p) = p,\ \forall\, p \in N$$

□

习题 2. 证明如果 $A \in GL(k,\mathbb{R}),\ B \in GL(l,\mathbb{R})$，则

$$det(A \otimes B) = (detA)^l(detB)^k$$

证明. 由 $A \in GL(k,\mathbb{R}),\ B \in GL(l,\mathbb{R})$，则 $\exists P \in GL(k,\mathbb{R}),\ Q \in GL(l,\mathbb{R})$

$$\text{s.t. } PAP^{-1},\ QBQ^{-1} \text{ 为上三角阵}$$

则有:

$$(P \otimes Q)(A \otimes B)(P \otimes Q)^{-1} = (PAP^{-1}) \otimes (QBQ^{-1})$$

且上矩阵也均为上三角的，则有:

$$det[(P \otimes Q)(A \otimes B)(P \otimes Q)^{-1}] = det[(PAP^{-1}) \otimes (QBQ^{-1})]$$

$$\Rightarrow det(P \otimes Q)det(A \otimes B)det(P \otimes Q)^{-1} = det[(PAP^{-1}) \otimes (QBQ^{-1})]$$

$$\Rightarrow det(A \otimes B) = (detA)^l(detB)^k$$

□

习题 3. 定义映射 $\pi : SO(n) \to S^{n-1}$ 为

$$\pi(A) = Ae,\ A \in SO(n)$$

其中 e 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个固定的单位向量，证明 π 为主丛，纤维为 $SO(n-1)$

证明. 先证明如下引理

Lemma3.1 若 G 为紧 Lie 群，且 $H \subset G$ 为闭的，则 $G \to G/H$ 为 H-主丛

Proof of Lemma3.1 设映射 $f : G \to G/H$ 为典范映射

则由 Lemma3.1 可知：

$$\phi : SO(n) \to SO(n)/SO(n-1)$$

$$A \mapsto [A]$$

为纤维丛，且纤维为 $SO(n-1)$，再考虑如下映射 ψ：

$$\psi : SO(n)/SO(n-1) \to S^{n-1}$$

$$[A] \mapsto Ae$$

可以证明以上映射 ψ 是微分同胚的，则考虑上两映射的复合 $\pi = \phi \circ \psi$：

$$\phi \circ \psi : SO(n) \to SO(n)/SO(n-1) \to S^{n-1}$$

$$A \mapsto [A] \mapsto Ae$$

即 π 为主丛，纤维为 $SO(n-1)$ □

习题 **4.** 计算酉群 $U(n)$ 和特殊线性群 $SL(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{C})$ 的 Lie 代数

证明. 定义运算 $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : V \times V \to V$ 为代数运算 $[A,B] = AB - BA$

- 酉群 $U(n)$

  对于 $\forall U \in U(n)$，则 $\exists S \in U(n)$ 可进行如下对角化：

  $$SUS^{-1} = diag(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_n}) = \begin{bmatrix} e^{i\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\lambda_n} \end{bmatrix}$$

  反过来可以用这个对角矩阵来构造 U，用指数展开得到：

  $$U = S^{-1} \circ diag(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \circ S = e^{iH}$$

  其中：

  $$H = exp\{iS^{-1} \circ diag(\theta_1, \dots, \theta_n) \circ S\}$$

  这是一个 Hermite 矩阵，则 iH 是反 Hermite 矩阵，反 Hermite 矩阵的集合就是酉群 $U(n)$ 的 Lie 代数 $\big(\mathfrak{u}(n), [\,\cdot\,,\,\cdot\,]\big)$，因为其满足：

$<1>$ 封闭性：对于 $\forall X, Y \in \mathfrak{u}(n)$，有 $[X, Y] \in \mathfrak{u}(n)$

$<2>$ 双线性性：对于 $\forall \alpha, \beta$ 和 $\forall X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{u}(n)$，都有：

$$[X, \alpha Y_1 + \beta Y_2] = \alpha[X, Y_1] + \beta[X, Y_2]$$

$$[\alpha X_1 + \beta X_2, Y] = \alpha[X_1, Y] + \beta[X_2, Y]$$

$<3>$ 反对称性：对于 $\forall X, Y \in \mathfrak{u}(n)$，有 $[X, Y] = -[Y, X]$

$<4>$ Jacobi 结合性：对于 $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{u}(n)$，有：

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

- 特殊线性群 $SL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C})$

记特殊线性群 $SL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C})$ 的 Lie 代数为 $\mathfrak{sl}(n)$，则：

$$\begin{aligned}
\mathfrak{sl}(n) &= \{I + A\varepsilon \in M(n) \mid det(I + A\varepsilon) = 1\} \\
&= \{I + A\varepsilon \mid tr(A) = 0\} \\
&\cong \{A \in M(n) \mid tr(A) = 0\}
\end{aligned}$$

即特殊线性群 $SL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C})$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(n)$ 为所有迹为 0 的矩阵 $\square$