微分流形

苏可铮　2012604

November 21, 2022

习题 **1.** 证明：TM 总是可定向的微分流形

证明. 首先证明切丛 TM 是 2m 维光滑流形：

Step1: TM 上的拓扑非商拓扑范畴，正好是反问题. 已知商空间拓扑求原空间拓扑 $\pi : TM \longrightarrow M$

Step2: 同构映射的建立. M 的光滑结构. $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, 任意 U_α, 建立双射

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times R^m, \psi_\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \left(x, y^1, \cdots, y^m\right)$$

Step3: 拓扑的定义. 上述映射诱导了 $\pi^{-1}(U)$ 上的拓扑, 这个拓扑下, ψ_α 为同胚. 我们这样定义 TM 上的拓扑, V 为 TM 的开集当且仅当 $\psi_\alpha(V \cap U_\alpha)$ 均为开集. $U_\alpha \times R^m$ 为 $M \times R^m$ 的开集. 这是一个良定义的拓扑, 使得 TM 称为 Hausdorff 空间

Step4: 建立微分结构. 设 $\mathscr{A}_1 = \{(\pi^{-1}(U_\alpha), (\varphi_\alpha, id) \circ \psi_\alpha)) \mid \alpha \in I\}$, 其中复合映射

$$(\varphi_\alpha, id) \circ \psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow R^{2m}$$

满足 $(\varphi_\alpha, id) \circ \psi_\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x\right) = (x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^m, y^1, \cdots, y^m)$. 为坐标映射记作 ξ_α.

Step5: 验证过渡映射是光滑: 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, 记

$$\begin{aligned} g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta &\longrightarrow GL(m, R) \\ p &\mapsto J_{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}}(\varphi_\alpha(p)) \end{aligned}$$

$g_{\beta\alpha}$ 为光滑映射. 容易计算

$$\begin{aligned} \xi_\beta \circ \xi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times R^m &\longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times R^m \\ (x, y) &\mapsto \left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x), g_{\beta\alpha}\left(\varphi_\alpha^{-1}(x)\right) y\right) \end{aligned}$$

因而是光滑的. 这说明 TM 是 $2m$ 维的光滑流形.

下面说明切丛 TM 是可定向的微分流形：

令 $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是 M 的光滑图册, 且 $V_\alpha=\phi_\alpha(U_\alpha)\subset\mathbb{R}^n$. 则

$$(\phi_\alpha)_*: TU_\alpha\to TV_\alpha=V_\alpha\times\mathbb{R}^n$$

是同态 (且其逆为 $(\phi_\alpha^{-1})_*$). 并且 TU_α 覆盖 TM 且有过渡映射:

$$t_{\alpha\beta}=(\phi_\alpha)_*\circ\left(\phi_\beta^{-1}\right)_*=\left(\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}\right)_*: V_\beta\times\mathbb{R}^n\to V_\alpha\times\mathbb{R}^n$$

是保定向的

令 $(x_1,\dots,x_n)$ 为 V_β 的坐标，$(x_{n+1},\dots,x_{2n},y_{n+1},\dots,y_{2n})$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的坐标，$(y_1,\dots,y_n)$ 为 V_α 的坐标，注意到

$$(y_1,\dots,y_n)=\phi_\alpha\left(\phi_\beta^{-1}(x_1,\dots,x_n)\right)$$

与 $x_{n+1},\dots,x_{2n}$ 无关, 则 $t_{\alpha\beta}$ 的 Jacobian 矩阵 $\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ 右上四分之一均为零，则:

$$\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{2n}=\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=n+1}^{2n}.$$

其中第一项为 $\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}$ 的 Jacobian 行列式，第二项为 $\left(\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}\right)_{*,(x_1,\dots,x_n)}$ 的 Jacobian 行列式，则:

$$\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{2n}=\det\left(\left(\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}\right)_{*,(x_1,\dots,x_n)}\right)^2>0.$$

即 $\{(TU_\alpha,(\phi_\alpha)_*)\}_{\alpha\in A}$ 为 TM 的定向图册

综上，TM 总是可定向的微分流形 □

习题 **2.** 将 Lie 导数看成 $C^\infty(M;TM)$ 的算子，证明

$$[L_X,L_Y]=L_{[X,Y]},\ \forall X,Y\in C^\infty(M,TM)$$

证明. 由 Poisson 括号可知:

$$[L_X,L_Y]=L_XL_Y-L_YL_X$$

则只需证明 $L_XL_Y-L_YL_X=L_{[X,Y]}$，由:

$$\begin{aligned}
L_{[X,Y]}\omega&=i_{[X,Y]}d\omega+di_{[X,Y]}\omega\\
L_X(L_Y\omega)&=i_Xd(i_Yd\omega+di_Y\omega)+di_Xd(i_Yd\omega+di_Y\omega)\\
L_Y(L_X\omega)&=i_Yd(i_Xd\omega+di_X\omega)+di_Yd(i_Xd\omega+di_X\omega)\\
L_XL_Y-L_YL_X&=L_X(L_Y\omega)-L_Y(L_X\omega)\\
&=i_Xd(i_Yd\omega+di_Y\omega)-i_Yd(i_Xd\omega+di_X\omega)\\
&=i_{[X,Y]}d\omega+di_{[X,Y]}\omega\\
&=L_{[X,Y]}\omega
\end{aligned}$$

综上，$[L_X,L_Y]=L_XL_Y-L_YL_X$ □

习题 **3.** 设 $h : M \to N$ 为微分同胚，M 上的向量场生成的局部单参数变换群 $\{\phi_t\}$，则 N 上的向量场 h_*X 生成的单参数变换群为 $\{h \circ \phi_t \circ h^{-1}\}$

证明. 证明任意 $f \in C^\infty(M)$ 则

$$\begin{aligned}
(h_* X_p)\, f = X_p(f \circ h) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ h\left(\phi_t(p)\right) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ h \circ \phi_t \circ h^{-1} \circ h(p) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ \tilde{\phi}_t(h(p)) \\
&= \tilde{X}_{h(p)} f
\end{aligned}$$

所以 $h_* X_p = \tilde{X}_{h(p)}$

即，M 上的向量场生成的局部单参数变换群 $\{\phi_t\}$，N 上的向量场 h_*X 生成的单参数变换群为 $\{h \circ \phi_t \circ h^{-1}\}$ □