微分流形

苏可铮 2012604

November 14, 2022

习题 1. 证明: 一般线性群 $GL(n,\mathbb{R})$ 恰有两个道路分支; 复的一般线性群 $GL(n,\mathbb{C})$ 是道路连通的

证明. 记 $M(n,\mathbb{R})$ 为 n 阶实矩阵群，且与 $\mathbb{R}^{n^2}$ 是微分同胚的，则一般线性群为:

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid detX \neq 0\}$$

则由矩阵映射的连续性知: $GL(n,\mathbb{R})$ 是 $M(n,\mathbb{R})$ 中的开集，则为 $M(n,\mathbb{R})$ 的子流形; 且在群乘法和逆运算下 $GL(n,\mathbb{R})$ 是闭的，故知 $GL(n,\mathbb{R})$ 为 Lie 群

且显然 $GL(n,\mathbb{R})$ 为维度为 n^2 的非连通的 Lie 群

考虑 $GL(n,\mathbb{R})$ 的两个子群:

$$GL_+(n,\mathbb{R}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid detX > 0\}$$

$$GL_-(n,\mathbb{R}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid detX < 0\}$$

显然 $GL(n,\mathbb{R})$ 有以上两个连通的道路分支

对于复的一般线性群 $GL(n,\mathbb{C})$，任取 $A, B \in GL(n,\mathbb{C})$，有:

$$\exists\, \alpha, \beta \neq 0 \;\; s.t. \;\; \alpha^n = detA, \beta^n = detB$$

$$\exists\, \delta : [0,1] \to \mathbb{C}\backslash\{0\} \;\; s.t. \;\; \delta(0) = \alpha, \delta(1) = \beta$$

$$\exists\, \Gamma : [0,1] \to SL(n,\mathbb{C}) \;\; s.t. \;\; \Gamma(0) = \frac{A}{\alpha}, \Gamma(1) = \frac{B}{\beta}$$

则有道路 $\phi(t) = \delta(t)\Gamma(t)$ 满足使得 A, B 之间连通

即复的一般线性群 $GL(n,\mathbb{C})$ 是道路连通的 □

习题 2. 用例 1.6.8 说明 $SL(n,\mathbb{R})$ 为 Lie 群，并计算其维数

证明. 对于特殊线性群:

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid detX \neq 0\}$$

考虑群同态

$$\det : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

则其映射的核为：$ker(\det) = SL(n,\mathbb{R})$，且又由 $SL(n,\mathbb{R})$ 为 $GL(n,\mathbb{R})$ 的子流形，则 $SL(n,\mathbb{R})$ 为 Lie 群

又由其映射的秩为 1，即 $rank\det = 1$

则 $dimSL(n,\mathbb{R}) = dimGL(n,\mathbb{R}) - rank\det = n^2 - 1$

即 $SL(n,\mathbb{R})$ 的秩为 $n^2 - 1$ $\square$

习题 3. 证明 $U(n)$ 微分同胚于 $S^1 \times SU(n)$

证明. 构造如下映射 f:

$$f : SU(n) \times S^1 \to U(n)$$

$$(A, z) \mapsto A \cdot diag(z, 1, \ldots, 1)$$

对于上述映射，其逆映射为：

$$f^{-1} : U(n) \to SU(n) \times S^1$$

$$A \mapsto \Big(A \cdot diag\big(det(A)^{-1}, 1, \ldots, 1\big), det(A)\Big)$$

显然 f 以及 f^{-1} 均为光滑映射，则 f 为微分同胚

即 $U(n)$ 微分同胚于 $S^1 \times SU(n)$ $\square$