微分流形

苏可铮 2012604

November 7, 2022

习题 1. 设 C 为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集，如果对

$$\forall c \in \mathbb{R}, C \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{c\}$$

均为 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中零测集，则 C 为 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集

证明. 先证明以下引理

Lemma1.1 如果闭区间 $I = [a, b]$ 被一族长度都不超过 δ 的开区间 $\{J\}$ 所覆盖，那么存在 $\{J\}$ 中有限个开区间 $J_1, \ldots, J_k$，使得

$$I \subset \bigcup_{i=1}^{k} J_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \mid J_i \mid \leqslant 2(\mid I \mid + \delta)$$

Proof of Lemma1.1 首先，不妨设 $\{J\}$ 由有限个开区间组成，则有公共点的三个开区间当中，必定有其中两个区间覆盖了第三个区间，即有最小左端点的区间和最大右端点的区间必定覆盖第三个区间

则我们可以从 $\{J\}$ 中去掉上述多余的开区间，使得 $\forall x \in I$ 至多属于 $\{J\}$ 中的两个开区间，并且 I 的端点 a 和 b 各自只属于 $\{J\}$ 中的一个开区间

在进行上述操作删除多余的开区间后，剩下的有限个开区间 $J_1, \ldots, J_k$ 必定满足要求

$$I \subset \bigcup_{i=1}^{k} J_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \mid J_i \mid \leqslant 2(\mid I \mid + \delta)$$

Lemma1.2 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集，如果集合

$$K_t = K \cap \left(\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}\right)$$

包含在 $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 的开集 $\{t\} \times W_t$ 之中，那么存在实数 $\alpha > 0$，使得

$$K \cap \left((t-\alpha, t+\alpha) \times \mathbb{R}^{n-1}\right) \subset (t-\alpha, t+\alpha) \times W_t$$

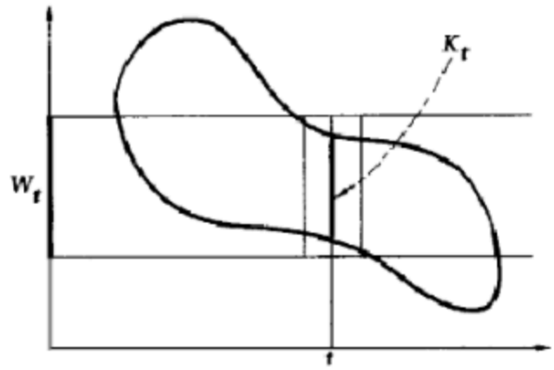

Figure 1: $\mathbb{R}^n$ 中的闭集 C 的按其中一个维度的任意切片

Proof of Lemma1.2 考虑连续函数

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \mid x_1 - t \mid$$

在紧集 $K \backslash (R \times W_t)$ 上恒取正值，因而有正的下确界 α，对这个 α 有

$$K \cap \big((t-\alpha, t+\alpha) \times \mathbb{R}^{n-1}\big) \subset (t-\alpha, t+\alpha) \times W_t$$

则引理 1.2 得证，下面证明本题

若 $C = K$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集，设 $\mathbb{R}$ 的闭区间 I 满足

$$K \subset I \times \mathbb{R}^{n-1}$$

对 $\forall t \in I$，截集 $K_t : K \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ 是 $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 中的零测集，则对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的有限个开立方体之并集 W_t，使得

$$K_t \subset t \times W_t, \mid W_t \mid < \varepsilon$$

则根据 Lemma1.2 可知，存在开区间 $J_t = (t - \alpha_t, t + \alpha_t) \big(\alpha_t \in (0,1)\big)$，使得

$$K \cap (J_t \times \mathbb{R}^{n-1}) \subset J_t \times W_t$$

再由 Lemma1.1 可知，从 $\{J_t\}_{t \in I}$ 之中可选择有限个 J_{t_i}，使得

$$I \subset \bigcup_{i=1}^{k} J_{t_i}, \sum_{i=1}^{k} \mid J_{t_i} \mid \leqslant 2(\mid I \mid + 2)$$

于是

$$K = K \cap (I \times \mathbb{R}^{n-1}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \big(K \cap (J_{t_i} \times \mathbb{R}^{n-1})\big) \subset \bigcup_{i=1}^{k} (J_{t_i} \times W_{t_i})$$

$$\sum_{i=1}^{k} \mid J_{t_i} \times W_{t_i} \mid = \sum_{i=1}^{k} \mid J_{t_i} \mid \times \mid W_{t_i} \mid < \varepsilon \sum_{i=1}^{k} \mid J_{t_i} \mid \leqslant 2\varepsilon(\mid I \mid + 2)$$

即，K 为 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集，则命题得证 $\square$

习题 2. 试说明从 m 维到 n (m < n) 维微分流形之间的光滑映射必定不是满射

证明. 由 Sard 定理知，对于光滑映射 $f: M \to N$，若 $dimM < dimN$，则 $f(M)$ 为 N 中的零测集，即从 M 到 N 微分流形之间的光滑映射必定不是满射 □

习题 3. 设 M 为 $\mathbb{R}^n$ 的正则子流形，L 为 $\mathbb{R}^n$ 中 n-1 维子线性空间，证明：存在 $v \in \mathbb{R}^n$ 使得 $(L+v) \cap M$ 为 M 的正则子流形

证明. 由于对于 $\mathbb{R}^n$ 中的正则子流形，其切空间可以看做 $\mathbb{R}^n$ 中的子线性空间，则不妨设 $m \in \mathbb{R}^n$，有 $T_m\mathbb{R}^n = L$

则只需取 $v \in \mathbb{R}^n$ 使得 $f: M \to \mathbb{R}^n$ 的光滑映射，且 f 与 $f\big((L+v) \cap M\big)$ 横截相交，则 $f^{-1}\big((L+v) \cap M\big) = (L+v) \cap M$ 为 M 的正则子流形

□