微分流形

苏可铮　2012604

November 22, 2022

习题 1. 设 A, B 为 M 上的闭集，且 $A \cap B = \varnothing$，则存在光滑函数 $f: M \to \mathbb{R}$，使得

$$f|_A \equiv 1,\ f|_B \equiv 0$$

证明. 令 $U = M - A, V = M - B$

由 $A \cap B = \varnothing$，则 $U \cup V = M$，且 V 是 A 的开邻域

根据光滑延拓定理，存在光滑函数 $f: M \to \mathbb{R}$，使得 $f|_A \equiv 1, suppf \subset V$

从而有 $f|_B \equiv 0$，则 f 即为所求 □

习题 2. 考虑映射 $f: M_{n\times n} \to M_{n\times n}, f(A) = AA^T$，说明这是光滑映射，求其切映射，并计算 f 在 $f^{-1}(I_n) = O(n)$ 上的秩

证明. 首先说明映射是光滑的：

对于映射 $f: M_{n\times n} \to M_{n\times n}, f(A) = AA^T$，取 $\forall A \in M_{n\times n}$，有

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \frac{\partial AA^T}{\partial A} = 2A,\ \frac{\partial^2 f}{\partial A^2} = 2,\ \ldots,\frac{\partial^k f}{\partial A^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{Z},\ k > 2)$$

则映射函数 f 任意阶可导，即为光滑函数，则 f 为一个光滑映射

当 $A \in O(n)$ 时，对于 $\forall h \in O(n)$ 有：

$$(A + th)(A + th)^T = (A + th)(A^T + th^T) = (t^2 + 1)I_n + t(hA^T + Ah^T),\ t \in \mathbb{R}$$

因此 f 在 A 处的切映射 $f_{*A}: O(n) \to I_n$ 为：

$$f_{*A}h = \frac{df}{dt}\bigg|_{t=0} (A + th)(A + th)^T = hA^T + Ah^T \neq 0$$

故可知 f 在 $f^{-1}(I_n) = O(n)$ 上的秩为 1 □

习题 3. 考虑映射 $f: GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R}), f(A) = A^{-1}$，说明 f 为光滑映射，计算其切映射

证明. 首先说明映射是光滑的：

由一般线性群 $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid detA \neq 0\}$，且由于 $det : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ 为连续函数，故 $GL(n,\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}^{\ltimes^{\nvDash}}$ 中的开集，从而是一个流形

对于映射 $f : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}), f(A) = A^{-1}$，取 $\forall A \in GL(n,\mathbb{R})$，则存在 A 的局部坐标系 (U,ϕ)，以及 $f(A)$ 的局部坐标系 (V,ψ)，使得：

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} = \phi(U \cap f^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$$

是 C^∞ 的，故 $f : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}), f(A) = A^{-1}$ 是光滑映射

当 $A \in GL(n,\mathbb{R})$ 时，对于 $\forall h \in GL(n,\mathbb{R})$ 有：

$$(A+th)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}hA^{-1}t + o(t), t \in \mathbb{R}$$

因此 f 在 A 处的切映射 $f_{*A} : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ 为：

$$f_{*A}h = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} (A+th)^{-1} = A^{-1}hA^{-1} \neq 0$$

故可知 f 在 $f^{-1}(I_n) = O(n)$ 上的秩为 1 $\square$