微分流形

苏可铮 2012604

October 24, 2022

习题 **1.** 证明淹没的局部标准形

证明. 取 p 附近的局部坐标系 (φ, U, V) 以及 $q = f(p)$ 附近的局部坐标系 (ψ, X, Y)

于是有 $f(U) \subset X$，由于 f 是淹没，则

$$d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} = d\psi_q \circ df_p \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} : T_{\varphi(p)}V = \mathbb{R}^m \to T_{\psi(q)}Y = \mathbb{R}^n$$

是一个满射

令 $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$，则对应 Jacobian 矩阵

$$\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right)_{m \times n}$$

秩为 n，通过调整坐标次序，我们可以假设矩阵

$$\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n, \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

在 $\varphi(p)$ 处是非退化的，注意到这个过程可以通过调整 (ψ, X, Y) 为 (ψ_1, X_1, Y_1)，并且有 $F = \psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1}$，定义映射：

$$G : V \to \mathbb{R}^m, (x^1, \dots, x^m) \mapsto (F^1, \dots, F^n, x^{n+1}, \dots, x^m)$$

在 $\varphi(p)$ 处是非退化的，由逆映射定理，存在 $\varphi(p)$ 的邻域 V_0，使得 $G|_{V_0} : V_0 \to G(V_0)$ 是微分同胚，记 $G|_{V_0} : V_0 \to G(V_0)$ 的逆为 $H : G(V_0) \to V_0$

注意到 $F = \pi \circ G$，其中 $\pi : (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$，令

$$U_1 = \varphi^{-1}(V_0), V_1 = G(V_0), \varphi_1 = G \circ \varphi$$

则 (φ_1, U_1, V_1) 是 p 附近的局部坐标系，并且有：

$$\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} = \psi_1 \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ H) = F \circ H = \pi \circ G \circ H = \pi$$

即

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n)$$

□

习题 2. 证明：C^k 映射限制在正则子流形上还是 C^k 映射

证明. 设 M^m 是 N^n 的正则子流形，则由正则子流形的结构定理知：

M 为 N 的子拓扑空间，且对任意 $p \in M$ 存在 N 中含有 p，存在 N 中含有 p 的局部坐标邻域 U 和坐标映射 $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$，使得

$$M \cap N = \{q \in U | x^i(q) = 0, m+1 \leqslant i \leqslant n\}$$

设 $f : N^n \to W$ 是 C^k 映射，则由定义知，对于 (U, φ) 以及 W 的局部坐标图卡 (V, ψ)，$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是 C^k 映射，于是

$$\psi \circ f|_{M \cap N} \circ \varphi^{-1}_{M \cap N}$$

也是 C^k 映射，其中 $\varphi_{M \cap N} = \{x^1, \ldots, x^m\}$ □

习题 3. 设 $f : M \to N$ 为微分流形之间的光滑映射，证明 f 的图像

$$\Gamma(f) = \{(p, q) \in M \times N | f(p) = q\}$$

为 $M \times N$ 的正则子流形

证明. 取 M 中含有 p 的局部坐标图卡 (φ, U, V) 以及 N 中含有 $q = f(p)$ 的局部坐标图卡 (ψ, X, Y)，则 $(\varphi \times \psi, U \times X, V \times Y)$ 是 $M \times N$ 的 (p, q) 邻域的坐标图卡

由 $q = f(p)$ 得到 $\psi^{-1}(y) = f(\varphi^{-1}(x))$，即 $y = \psi(f(\varphi^{-1}(x)))$

则可以构造如下光滑映射：

$$\Psi : V \times Y \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (a, b) \mapsto (a, b - \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(a))$$

显然 Ψ 是单射并且是局部微分同态，因此是从 $V \times Y$ 到像集 $\Psi(V \times Y)$ 的全局微分同胚，因此 $(\Psi \circ (\varphi \times \psi), U \times X, \Psi(V \times Y))$ 也是 $M \times N$ 的 (p, q) 邻域的坐标图卡，由此得到：

$$(p, q) \in \Gamma \cap (U \times X) \Rightarrow \psi(q) = \psi(f(\varphi^{-1}(\varphi(p)))) \Rightarrow \Psi(\varphi(p), \psi(q)) = (\varphi(p), 0)$$

综上，f 的图像 $\Gamma(f) = \{(p, q) \in M \times N | f(p) = q\}$ 为 $M \times N$ 的正则子流形

□

习题 4. 证明：复射影空间或者 Grassman 流形是 A_2, T_2 的

证明. 在 $S = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : |z| = 1\}$ 上定义等价关系, $x \sim y \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi]$ 使得 $x = e^{i\theta} y$. 定义商空间

$$\mathbb{CP}^n = S / \sim .$$

赋予其商拓扑:

$$\pi : S \to \mathbb{CP}^n, \quad x \mapsto [x].$$

V 是 $\mathbb{CP}^n$ 中的开集当且仅当 $\pi^{-1}(V)$ 是 S 中的开集. 证明 π 是开映射: 设 V 是 S 中的开集, 则

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\theta\in[0,2\pi]} e^{i\theta}(V).$$

对 $\forall\theta \in [0, 2\pi], e^{i\theta}(V)$ 同胚与 V 是 S 中的开集. 因此, 根据商拓扑定义, $\pi(V)$ 是开集, 即 π 是开映射.

证明 T_2 性质:

设 $[x], [y] \in \mathbb{CP}^n, [x] \neq [y]$, 有 $\pi^{-1}([x]) = \left\{e^{i\theta}x \in S : \theta \in [0, 2\pi]\right\}$, $\pi^{-1}([y]) = \left\{e^{i\theta}y \in S : \theta \in [0, 2\pi]\right\}$, 显然 $\pi^{-1}([x])$ 与 $\pi^{-1}([y])$ 不相交. 又对任意给定的 $x \in S$ 可以定义一个映射如下

$$S^1 \to \pi^{-1}([x]), \quad e^{i\theta} \mapsto e^{i\theta}x.$$

容易发现该映射为同胚映射, 故 $\pi^{-1}([x])$ 为紧集, 于是 $\pi^{-1}([x])$ 与 $\pi^{-1}([y])$ 为 S 中的不交闭集, 于是由 Urysohn 引理可以找到一个连续函数 $g : S \to \mathbb{R}$ 使得 $g|_{\pi^{-1}([x])} = 1$ 且 $g|_{\pi^{-1}([y])} = 0$. 我们再定义如下函数 $h : S \to \mathbb{R}$:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(e^{i\theta}x\right) d\theta.$$

由于 $\pi^{-1}([x])$ 与 $\pi^{-1}([y])$ 再 $e^{i\theta}$ 作用下不变, 故 $h|_{\pi^{-1}([x])} = 1$ 且 $h|_{\pi^{-1}([y])} = 0$. 我们再定义 $\hat{h} : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{R}, \hat{h}([z]) = h(z)$. 由于 $h\left(e^{i\theta}z\right) = h(z), \hat{h}$ 是良定义的. 由于 $h = \hat{h}\circ\pi$ 且 π 是开映射, 我们有 $\hat{h}$ 是连续的. 令 $U = \hat{h}^{-1}\left(\frac{1}{2}, \infty\right), V = \hat{h}^{-1}\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, 则 U, V 即是包含 $[x], [y]$ 的不交开集.

证明 A_2 性质:

设 $\{U_i\}_{i\in N}$ 是 S 的一组可数拓扑基, 则 $\{\pi(U_i)\}_{i\in N}$ 是 $\mathbb{CP}^n$ 的一组可数拓扑基. 由于 π 是开映射, $\pi(U_i)$ 是开集. 设 $\hat{V}$ 是 $\mathbb{CP}^n$ 中的开集, 则 $\pi^{-1}(\hat{V})$ 是 S 中开集, 因此 $\pi^{-1}(\hat{V}) = \cup U_{i_k}$. 接着就有 $\hat{V} = \pi(\cup U_{i_k}) = \cup\pi(U_{i_k})$

局部坐标覆盖: 对 $k = 1, 2, \ldots, n+1$, 令

$$U_k = \left\{[x] \in \mathbb{CP}^n \mid x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}\right), x^k \neq 0\right\}$$

定义 $\varphi_k : U_k \to \mathbb{R}^n$ 为

$$\varphi_k([x]) = \left(\frac{x^1}{x^k}, \ldots, \frac{x^{k-1}}{x^k}, \frac{x^{k+1}}{x^k}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^k}\right).$$

易见 φ_k 是良定义的且是单射.

$$\varphi_k^{-1}\left(y^1, y^2, \ldots, y^n\right) = \left[y^1, y^2, \ldots, y^{k-1}, 1, y^k, \ldots, y^n\right].$$

令 $\hat{U}_k = \left\{x \in S \mid x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots, x^{n+1}\right), x^k \neq 0\right\}$.

显然 $\varphi_k \circ \pi : \hat{U}_k \to \mathbb{R}^n$ 是连续的, 根据商映射的性质, φ_k 连续.

φ_k^{-1} 可以视为从 $\mathbb{R}^n$ 到 S, 再商到 $\mathbb{CP}^n$ 的复合映射, 故连续.

$$
\begin{aligned}
&\varphi_k^{-1}\left(y^1, \ldots, y^n\right) \\
=&\left[\frac{y^1}{\sqrt{1+|y|^2}}, \ldots, \frac{y^{k-1}}{\sqrt{1+|y|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+|y|^2}}, \frac{y^k}{\sqrt{1+|y|^2}}, \ldots, \frac{y^n}{\sqrt{1+|y|^2}}\right].
\end{aligned}
$$

转换映射: 设 $[x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}] \in U_1 \cap U_2$. 由定义

$$
\begin{aligned}
\varphi_1\left(\left[x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}\right]\right) &= \left(\frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^1}\right). \\
\varphi_2\left(\left[x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}\right]\right) &= \left(\frac{x^1}{x^2}, \frac{x^3}{x^2}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^2}\right).
\end{aligned}
$$

故有:

$$
\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\left(y^1, y^2, \ldots, y^n\right) = \left(\frac{1}{y^1}, \frac{y^2}{y^1}, \ldots, \frac{y^n}{y^1}\right).
$$

对于其他转换映射同理可证. 显然这些转换映射都是复解析的. $\square$