# 微分流形

苏可铮 2012604

October 22, 2022

**习题 1.** 证明：映射 $f: T^2 = S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$

$$f(e^{i\theta}, e^{i\phi}) = ((a + bcos\phi)cos\theta, (a + bcos\phi)sin\theta, bsin\phi),\ \theta, \phi \in [0, 2\pi]$$

是一个嵌入

证明. 考虑矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}$$

则显然有 $rank_p f \equiv 2, \forall p \in T^2$，则 $f$ 为浸入

又映射 $f$ 的像集 $f(T^2)$ 为 $R^3$ 中的圆环面（如下图所示）

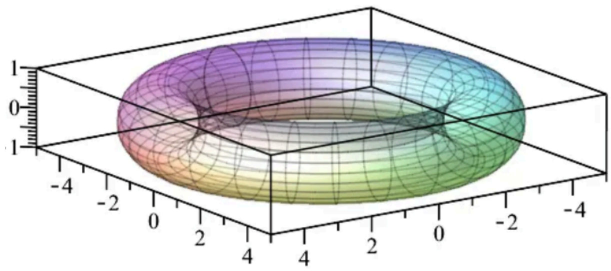


Figure 1: $R^3$ 中的圆环面

显然映射 $f$ 是连续的单射，若将陪域限制在 $f(T^2)$ 上时，就得到了连续的双射 $\hat{f}: T^2 \to f(T^2)$

则要证明 $f: T^2 \to \mathbb{R}^3$ 是嵌入映射，只需证明 $\hat{f}: T^2 \to f(T^2)$ 是同胚映射

即只需要证明 $\hat{f}^{-1}: f(T^2) \to T^2$ 连续

定义映射 $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \to (e^{iacrtan\frac{y}{x}}, e^{iarccos\frac{x^2+y^2+z^2-a^2-b^2}{2ab}})$$

则 $g$ 的限制映射 $g|_{f(T^2)}$ 连续，从而得到 $\hat{f}^{-1}: f(T^2) \to T^2$ 就是将限制映射 $g|_{f(T^2)}$ 也限制在 $T^2$ 上所得到的，即 $\hat{f}^{-1}: f(T^2) \to T^2$ 连续

综上得证：映射 $f: T^2 = S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$ 是一个嵌入

*Tips:* 更一般的有，对任意 $n \in \mathbb{Z}$，$T^n$ 可以嵌入到欧氏空间 $R^{n+1}$ 中

□

习题 **2.** 证明：逆映射定理

证明. 不妨假设 $M^n = N^n = \mathbb{R}^n, p = q = 0$

通过复合一个可逆的线性映射，我们也不妨假设 $f$ 在原点的 Jacobian 为单位矩阵，即 $Jf(0) = I_n$，这时在原点附近 $f$ 是恒同映射的小扰动，扰动项可定义为：

$$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, g(x) = f(x) - x, x \in \mathbb{R}^n$$

由 $Jg(0) = 0$ 知存在 $\epsilon > 0$，使得

$$||Jg(x)|| \leqslant \frac{1}{2}, \forall x \in \overline{B_\epsilon(0)}$$

由多元向量值函数的拟微分平均值定理，有

$$||g(x_1) - g(x_2)|| \leqslant ||Jg(\xi)|| \cdot ||x_1 - x_2|| \leqslant \frac{1}{2}||x_1 - x_2||, \forall x_1, x_2 \in \overline{B_\epsilon(0)}$$

设 $y \in \overline{B_{\frac{\epsilon}{2}}(0)}$，我们来解方程

$$f(x) = y, x \in B_\epsilon(0)$$

这等价于在 $B_\epsilon(0)$ 中寻找 $g_y(x) = x + y - f(x)$ 的不动点，我们利用压缩映像原理来找不动点，首先有：

$$g_y(x) \leqslant ||y|| + ||g(x)|| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2}||x|| \leqslant \epsilon, \forall x \in \overline{B_\epsilon(0)}$$

这说明 $g_y(\overline{B_\epsilon(0)}) \subset B_\epsilon(0)$，映射 $g_y: \overline{B_\epsilon(0)} \to B_\epsilon(0) \subset \overline{B_\epsilon(0)}$ 为压缩映射：

$$||g_y(x_1) - g_y(x_2)|| = ||g(x_2) - g(x_1)|| \leqslant \frac{1}{2}||x_1 - x_2||, \forall x_1, x_2 \in \overline{B_\epsilon(0)}$$

从而方程在 $\overline{B_\epsilon(0)}$ 中有唯一解，记为 $x_y$，故有 $x_y \in B_\epsilon(0)$

记 $U = f^{-1}(B_{\frac{\epsilon}{2}}(0)) \cap B_\epsilon(0)$，$V = B_{\frac{\epsilon}{2}}(0)$，则上面的论述表明，$f|_U: U \to V$ 为一一的 $C^k$ 映射，其逆 $h(y) = x_y$ 满足方程

$$y - g(h(y)) = h(y)$$

我们有

(1)$h: V \to U$ 为连续映射：当 $y_1, y_2 \in V$ 时

$$||h(y_1) - h(y_2)|| \leqslant ||y_1 - y_2|| + ||g(h(y_1)) - g(h(y_2))|| \leqslant ||y_1 - y_2|| + \frac{1}{2}||h(y_1) - h(y_2)||$$

从而 $||h(y_1) - h(y_2)|| \leqslant 2||y_1 - y_2||$，即 $h$ 为 Lipschitz 连续映射

(2)$h:V\to U$ 为可微映射：设 $y_0\in V$，则对 $y\in V$ 有

$$h(y)-h(y_0)=(y-y_0)-[g(h(y))-g(h(y_0))]=(y-y_0)-Jg(h(y_0))\cdot(h(y)-h(y_0))+o(||h(y)-h(y_0)||)$$

即

$$h(y)-h(y_0)=[I_n+Jg(h(y_0))]^{-1}=[Jf(h(y))]^{-1},\forall y\in V$$

(3)$h:V\to U$ 为 $C^k$ 映射：有 (2) 知

$$Jh(y)=[I_n+Jg(h(y_0))]^{-1}=[Jf(h(y))]^{-1},\forall y\in V$$

由 f 为 $C^k$ 映射以及上式可依次提升 $h$ 的可微次数，即 $h$ 为 $C^k$ 映射

综上得证：存在 $U,V$ 使得 $f|_U:U\to V$ 为 $C^k$ 的微分同胚 $\square$

**习题 3.** 证明：若 $M^m$ 为紧致微分流形且可以嵌入到 $\mathbb{R}^{m+1}$，则 $M^m\times\mathbb{S}^n$ 可以嵌入到 $\mathbb{R}^{n+m+1}$，作为推论可知 $\mathbb{T}^n$ 可以嵌入到 $\mathbb{R}^{n+1}$

*证明.* $\square$