微分流形

苏可铮 2012604

October 17, 2022

1 必做题

习题 **1.** 证明：微分流形的开子集仍是开子集

证明. 设拓扑空间 M 为 n 维微分流形，M 有开覆盖 $\{O_\alpha\}$，即 $M = \bigcup_\alpha O_\alpha$ 满足：

(a) 对于每一 O_α 存在同胚映射 $\Psi_\alpha : O_\alpha \to V_\alpha$（$V_\alpha$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的用通常拓扑 $\mathscr{F}_u$ 衡量的开子集）

(b) 若 $O_\alpha \cap O_\beta \neq \varnothing$，则复合映射 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ 是 C^∞ 光滑的

可见，流形在每一点的邻域和 n 维欧式空间的一个开子集是同胚的

因此，微分流形的开子集仍是开子集

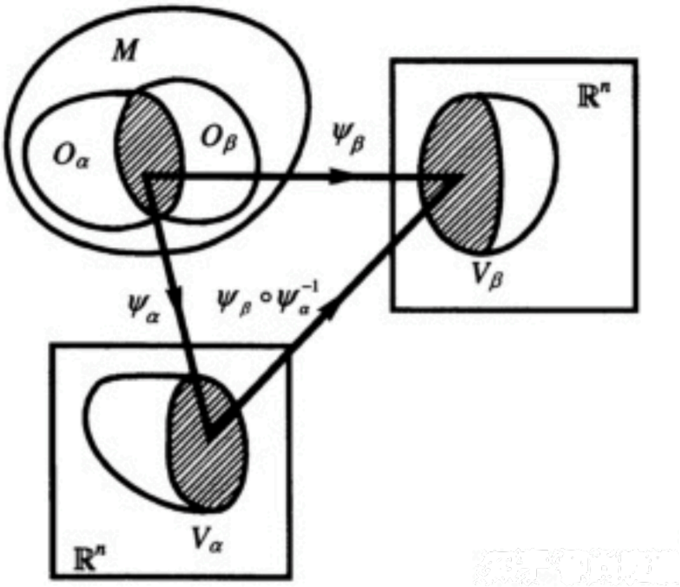

Figure 1: 流形的邻域和 n 维欧式空间的开子集

Tips: 流形正是一块块欧式空间粘起来的结果，它局部地看起来像 $\mathbb{R}^n$，整体上可以看起来不同于 $\mathbb{R}^n$

□

习题 2. 证明：$\mathbb{R}^n$ 中的单位开球与 $\mathbb{R}^n$ 微分同胚

证明. 构造映射

$$f : x \to \frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}} \quad ; \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{B}^n$$

显然对于此映射 f 是光滑的，且存在光滑逆映射 $g : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$，使得 $f \circ g = id$、$g \circ f = id$

则 f 为微分同胚，即 $\mathbb{R}^n$ 中的单位开球与 $\mathbb{R}^n$ 微分同胚 □

习题 3. 证明：可以赋予复射影空间合理的拓扑使其成为复流形

证明. 对于复射影空间，我们考虑 n+1 维复欧氏空间 $\mathbb{C}^{n+1}$，其子集合 $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ 中任意两点 $z = z(z_0, \ldots, z_n)$、$w = w(w_0, \ldots, w_n)$，若存在非零复数 $\lambda \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ 使得 $z = \lambda w$，则称两点等价，按此等价关系得商空间 $(\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\})\backslash \sim$ 记为 $\mathbb{CP}^n$，即为 n 维复射影空间

利用 $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ 到 $\mathbb{CP}^n$ 的自然投影映射：

$$\sigma : (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) \to \overline{(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})} \quad ; \quad \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{CP}^n$$

用 $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ 的欧式拓扑结构，在 $\mathbb{CP}^n$ 中定义关于 σ 的商拓扑即可，于是 $\mathbb{CP}^n$ 在此拓扑下成为复流形

习题 4. 研究反演和分式线性变换是否保定向, 并证明球面是可定向的

证明. 分式线性变换、反演变换不一定保定向

对于单位球，记北极点为 $N = (0, 0, 1)$，南极点为 $S = (0, 0, -1)$

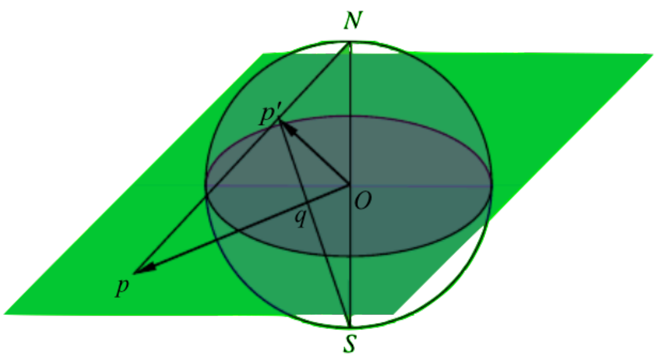

Figure 2: 球面 S^2 是可定向的

直接取标准南北开覆盖 $S^2\backslash\{N\}$ 和 $S^2\backslash\{S\}$，则在公共部分的参数变换公式为

$$\tilde{u} = \frac{u}{u^2+v^2}, \tilde{v} = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

由于 $\{S^2\backslash\{N\}, S^2\backslash\{S\}\}$ 构成 S^2 的开覆盖，并且其中间转换映射的 Jacobi 矩阵：

$$\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} & \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} \\ \frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2} & \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(u^2+v^2)^2} > 0$$

故 S^2 是可定向的 □

习题 **5.** 证明：如果微分流形 M、N 均可定向，则 M×N 也可定向

证明. 流形 M、N 均可定向，由题，存在 M 的局部坐标覆盖 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$，使得当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时，$\det J(\varphi_\beta \cap \varphi_\alpha^{-1}) > 0$

以及存在 N 的局部坐标覆盖 $\{(V_\gamma, \psi_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$，使得当 $V_\gamma \cap V_\delta \neq \varnothing$ 时，$\det J(\psi_\gamma \cap \psi_\delta^{-1}) > 0$

于是对于乘积流形 M×N，我们可取 $(U_\alpha \times V_\gamma, (\varphi_\alpha, \psi_\gamma))$ 为其局部图卡，这样

$$\{(U_\alpha \times V_\gamma, (\varphi_\alpha, \psi_\gamma))\}$$

构成 M×N 的局部坐标系，其转换映射的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) & 0 \\ 0 & J(\psi_\gamma \circ \psi_\delta^{-1}) \end{pmatrix}$$

因此，M×N 的转换映射的 Jacobi 行列式也总是正的

Tips: 反之可见，$M\times N$ 可定向，也必可推出 M、N 均可定向，即习题 8 □

2 选做题

习题 **6.** 令 $G(n,k)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中 $k(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 维线性子空间的集合，证明：可以赋予 $G(n,k)$ 合理的拓扑使其成为微分流形

证明. 对于在子空间拓扑下显然成立 □